Title: Relacje spełniane przez odwzorowania stopnia 5

Author: Maciej Maciejewski

Citation style: Maciejewski Maciej. (2013). Relacje spełniane przez odwzorowania stopnia 5. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski

Instytut Matematyki

Relacje spełniane przez odwzorowania stopnia 5

Maciej Maciejewski

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
dra hab. Andrzeja Prószyńskiego

Katowice 2013

Składam serdeczne podziękowania
Panu dr. hab. Andrzejowi Prószyńskiemu
za pomoc i cenne wskazówki
podczas pisania pracy.

Spis treści

Wstęp

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Wśród wszystkich odwzorowań pomiędzy R-modułami można wyróżnić takie, które są scharakteryzowane przez pewne warunki typu równości. Na przykład odwzorowania liniowe spełniają następujące dwa warunki:

(1) $f(rx) = rf(x), r \in R$,

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

gdzie x, y są dowolnymi elementami dziedziny f.

Odwzorowania kwadratowe można scharakteryzować przy pomocy następujących warunków:

(1) $f(rx) = r^2 f(x), r \in R$,

(2) funkcja dwóch zmiennych $\Delta^2 f$ określona wzorem

$(\Delta^2 f)(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$

jest dwuliniowa.

Uogólnieniem obu powyższych typów odwzorowań są tak zwane $m-$odwzorowania zdefiniowane w [**1**]. Zostaną one omówione w dalszej części pracy. W [4] udowodniono, że wszystkie odwzorowania pochodzące z wielomianów jednorodnych stopnia m są $m-$ odwzorowaniami, jednak, w przeciwieństwie do przypadków $m = 1$ oraz $m = 2$, na ogół nie na odwrót. Oznacza to, że przy $m > 2$ potrzebne są dodatkowe warunki typu równości. Przez **warunek typu równości** będziemy rozumieli związek $\sum_j r_j f(\sum_k s_{jk} x_k) = 0$, gdzie j, k przebiegają skończone zbiory indeksów,

$r_j, s_{jk} \in R$ oraz x_k są dowolnymi elementami dziedziny odwzorowania f. Przy tym wygodnie jest zakładać, że r_j, s_{jk} są ustalone dla każdej równości. Jeśli natomiast są one traktowane jako dodatkowe zmienne, to tak rozumianą równość nazywamy ścisłą. Dokładniej mówiąc, r_j oraz s_{jk} rozumiemy wówczas jako ustalone funkcje wielomianowe skończonej ilości zmiennych o współczynnikach z $\mathbb{Z}$, do których możemy podstawić dowolne elementy pierścienia (dla przykładu w warunku (1) powyżej występuje wyrażenie r^2, w którym zmienną niezależną jest r). Kiedy więc mówimy o ścisłych równościach, dotyczą one odwzorowań pomiędzy modułami nad dowolnym pierścieniem przemiennym R.

Klasę A odwzorowań pomiędzy R-modułami nazywamy równościowo definiowalną, jeśli składa się ona ze wszystkich odwzorowań $f : X \to Y$ ($X, Y \in R - Mod$) spełniających ustalony zestaw warunków typu równości, tzn. takich odwzorowań, dla których

$$\sum_j r_{ij} f(\sum_k s_{ijk} x_k) = 0, i \in I, x_k \in X$$

przy pewnych ustalonych $r_{ij}, s_{ijk} \in R$. Jeśli R nie jest ustalonym, lecz dowolnym pierścieniem i równości te są ścisłe, to klasę także nazywamy ścisłą.

Klasa Hom_R^m odwzorowań pochodzących od wielomianów jednorodnych stopnia m nad ustalonym pierścieniem R na ogół nie jest równościowo definiowalna. Winę za to ponosi fakt, że z reguły wielomiany i odwzorowania wielomianowe nie są tym samym. Istnieje jednak najmniejsza klasa równościowo definiowalna $ED(Hom_R^m)$ zawierająca Hom_R^m, przy czym wiadomo z [**7**], że klasy te są równe nad dowolnym ciałem. Inną sprawą jest kwestia, czy ta klasa jest ścisła, czy też nie. Odpowiedź na to pytanie daje [**3**], Theorem 6.2. Okazuje się, że jest tak dokładnie wtedy, gdy $m \leq 5$. Równości definiujące klasę $ED(Hom_R^m)$ będziemy nazywali pełnym zestawem równośći dla klasy Hom_R^m. Jeśli równości te są ścisłe, będziemy mówili o pełnym zestawie równości dla klasy Hom^m. Jedną z równości, którą spełniają odwzorowania klasy Hom^m_R, jest tak zwany **warunek regularności**. W przypadku $m = 3$ pokazuje się ([**7**]), że klasa $ED(Hom^3_R)$ jest identyczna z klasą regularnych 3-odwzorowań. W przypadku $m = 4$ potrzebne są jeszcze trzy dodatkowe ścisłe równości. Dokładny wynik dla $m = 3$ i $m = 4$ przedstawimy w następnym rozdziale. Przypadek $m = 5$, jako ostatni niezbadany, jest przedmiotem niniejszej pracy. Dla $m = 5$ rozwiązanie składa się z dwóch części. Jedna z wersji pierwszej części została opublikowana w pracy [**2**]. W niniejszej pracy przypadek $m = 5$ zostanie zbadany niezależnie z wykorzystaniem innej metody, niż było to zrobione w [**2**]. Warunkiem zastosowania tej metody jest znajomość relacji spełnianych przez elementy $r^2 - r$, $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$ pierścienia R.

W pierwszym rozdziale podajemy definicje i twierdzenia znane z prac [**4**], [**5**], [**7**].

W rozdziale drugim znajdujemy relacje generujące pomiędzy elementami $r^n - r$, gdzie $n = 2^l$, $l = 1, 2, \dots$ (Twierdzenie 2.6) oraz relacje generujące pomiędzy elementami $r^3 - r$ pierścienia przemiennego (Twierdzenie 2.10).

W rozdziale trzecim znajdujemy relacje tworzące pełny zestaw tzw. 3-równości dla klasy Hom^5 (Twierdzenie 3.3 oraz Twierdzenie 3.4).

W rozdziale czwartym znajdujemy relacje tworzące pełny zestaw tzw. 2-równości dla klasy Hom^5 (Twierdzenie 4.2 oraz Twierdzenie 4.3).

W rozdziale piątym podsumowujemy badania nad relacjami spełnianymi przez odwzorowania stopnia 5, zawarte w Podrozdziale 3.2 oraz Rozdziale 4.

W całej pracy stosujemy podwójną numerację, osobno dla twierdzeń, lematów, wniosków i definicji.

ROZDZIAŁ 1

Preliminaria

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Przypomnijmy definicje znane na przykład z [**1**], [**4**] lub [**7**].

1.1. Defekty odwzorowań i m–odwzorowania

DEFINICJA 1.1.

Jeśli X, Y są R–modułami, to dowolnemu odwzorowaniu $f : X \to Y$ można przyporządkować jego n–ty defekt $\Delta^n f : X^n \to Y$, ($n = 0, 1, 2, \ldots$), określony wzorem

$$(\Delta^n f)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{H \subset [1,n]} (-1)^{n-|H|} f(\sum_{i \in H} x_i), \tag{1.1}$$

gdzie $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Defekty odwzorowania f pozwalają wyrazić wartości tego odwzorowania na sumach elementów za pomocą wzoru:

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_t \leq n} (\Delta^t f)(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \tag{1.2}$$

Zauważmy, że $\Delta^0 f = f(0)$, $\Delta^1 f = f - f(0)$ oraz $\Delta^n f = \Delta^n (f - f(0))$ dla $n > 0$. Ponieważ interesują nas formy stopnia dodatniego, będziemy dalej zakładać, że $f(0) = 0$ oraz $n > 0$. Przy tych założeniach defekty można określić indukcyjnie w następujący sposób:

(1) $\Delta^1 f = f$,

(2) $(\Delta^{n+1} f)(x_0, \ldots, x_n) = (\Delta^n f)(x_0 + x_1, x_2, \ldots, x_n) -$

$-(\Delta^n f)(x_0, x_2, \ldots, x_n) - (\Delta^n f)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ponadto $(\Delta^n f)(x_1, , \ldots, x_n) = 0$, jeśli $x_i = 0$ dla pewnego i. Oczywiście $\Delta^n f$ jest symetryczne.

Definicja 1.2 (Ferrero, Micali, [**1**]).

m-odwzorowaniem nazywamy odwzorowanie $f : X \to Y$ spełniające następujące warunki:

(A1) $f(rx) = r^m f(x)$ *dla* $r \in R$, $x \in X$,

(A2) $\Delta^m f : X^m \to Y$ *jest odwzorowaniem m-liniowym.*

Definicja 1.3.

$m-$odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy regularnym, jeśli jego $(m-1)-$szy defekt $() = \Delta^{m-1} f$ spełnia następujący warunek:

(A) $(rx, sy, -) - r(x, sy, -) - s(rx, y, -) + rs(x, y, -) = 0$

dla $r, s \in R$, $x, y \in X$,

gdzie $-$ oznacza pozostałe $k-1$ zmiennych.

Pewne własności regularnych m-odwzorowań podaje następujące

Twierdzenie 1.1 ([**5**], Proposition 2.5).

Dowolne regularne m-odwzorowanie f na $R-$module X spełnia następujące równości:

(1) $(r_1 x_1, \ldots, r_{m-1} x_{m-1}) =$

$= \sum_{i=1}^{m-1} r_1 \ldots \widehat{r_i} \ldots r_{m-1} (x_1, \ldots, x_{i-1}, r_i x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{m-1}) -$

$- (m-2) r_1 \ldots r_{m-1} (x_1, \ldots, x_{m-1})$,

(2) $\sum_{i=1}^{m-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},rx_i,x_{i+1},\ldots,x_{m-1}) -$
$- (r^2+(m-2)r)(x_1,\ldots,x_{m-1}) = 0,$

(3) $(rsx,-) = r(sx,-) + s^2(rx,-) - rs^2(x,-),$

(4) $(r^2x,-) = (r+r^2)(rx,-) - r^3(x,-),$

(5) $(r-r^2)(sx,-) = (s-s^2)(rx,-) + (rs^2-r^2s)(x,-),$

gdzie $() = \Delta^{m-1}f$ *oraz* $r_i, r, s \in R$, $x_i, x \in X$.

Pokazuje się, że wszystkie odwzorowania pochodzące od wielomianów jednorodnych stopnia m są regularnymi m–odwzorowaniami ([**5**]). Dotyczy to także ich uogólnień, tzn. odwzorowań wielomianowych wyznaczonych przez formy stopnia m w sensie N. Roby [**9**], tzw. "prawa wielomianowe". Te odwzorowania są określone pomiędzy R–modułami X, Y, w odróżnieniu od zwykłych odwzorowań wielomianowych, które są określone na R^n i tworzą klasę Hom_R^m, o której była mowa we Wstępie. Wiadomo jednak ([**7**]), że zarówno szersza, jak i węższa klasa spełniają te same równości, dlatego prawami wielomianowymi nie będziemy się w tej pracy zajmowali. W przypadku $m=3$ pokazuje się, że klasa $ED(Hom_R^3)$ jest identyczna z klasą regularnych 3–odwzorowań, a zatem składa się dokładnie z tych odwzorowań, które spełniają warunki (A1), (A2) i (A). W przypadku $m=4$ potrzebne są jeszcze trzy dodatkowe ścisłe równości, a mianowicie klasa ED(Hom_R^4) składa się dokładnie z tych odwzorowań, które spełniają warunki (A1), (A2) i (A) oraz

(B1) $(rx,sy) - r(x,sy) - s(rx,y) + rs(x,y) - (s-s^2)[r] = 0,$

(B2) $(rsx,y) - r(x,sy) - s^3(rx,y) + rs^3(x,y) + (s^2-s^3)[r] = 0,$

(B3) $3(rx,y) - 3r(x,y) + (1-r)(rx,x,y) + [r] = 0,$

gdzie $[r] = (rx,x,y) + (x,ry,r) - r^2((x,x,y)+(x,y,y)) - 3(r-r^2)(x,y)$.

W tym przypadku po raz pierwszy pojawiają się elementy $[r]$ o skomplikowanej postaci, ale o bardzo dobrych własnościach, analogicznych do własności elementów $r^2 - r$ pierścienia R. Podaje je następujące

TWIERDZENIE 1.2 ([7], Wniosek 5.1.4).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

(1) $[r+s] = [r] + [s] + rs[2]$,

(2) $[rs] = r[s] + s^2[r]$,

(3) $(r^2 - r)[s] = (s^2 - s)[r]$,

(4) $2[r] = (r^2 - r)[2]$, $[2r] = (2r^2 - r)[2]$,

(5) $[r] = [1-r]$, $[0] = [1] = 0$, $[2] = [-1]$.

1.2. Podzielone potęgi

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Jeśli **X** jest R-modułem, to algebrą z podzielonymi potęgami na module **X** (zobacz [9]) nazywamy R-algebrę przemienną generowaną przez elementy $x^{(m)}, x \in X, m = 0, 1, 2...$ z relacjami

(1) $x^{(0)} = 1$,

(2) $(rx)^{(m)} = r^m x^{(m)}$,

(3) $x^{(m)} y^{(n)} = (m,n) x^{(m+n)}$,

(4) $(x+y)^{(m)} = \sum_{i+j=m} x^{(i)} y^{(j)}$

dla $x, y \in X, r \in R$, gdzie $(m,n) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$.

Algebrę tę oznaczamy $\Gamma_R(X)$ lub po prostu $\Gamma(X)$.

Przyjmując $\deg x^{(m)} = m$ otrzymujemy naturalną gradację $\Gamma(X)$. Składową stopnia m oznaczamy $\Gamma^m(X)$ i nazywamy m-tą podzieloną potęgą modułu X. Jest ona generowana jako $R-$moduł przez elementy $x_1^{(i_1)} ... x_n^{(i_n)}$ dla $x_1, \ldots x_n \in X, i_1 + \ldots + i_n = m$, z relacjami pochodzącymi z wypisanych powyżej. W szczególności $\Gamma^0(X) = R$, $\Gamma^1(X) = X$ oraz $\Gamma^m(R) = R \cdot 1^{(m)} \approx R$.

Zarówno Γ, jak i Γ^m są funktorami. Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest homomorfizmem R–modułów, to $\Gamma(f) : \Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(Y)$, $\Gamma(f)(x^{(m)}) = f(x)^{(m)}$ jest homomorfizmem algebr, a dla każdego $m = 0, 1, 2, \dots$ mamy homomorfizm R–modułów $\Gamma^m(f) : \Gamma^m(X) \longrightarrow \Gamma^m(Y)$ określony na generatorach wzorem $\Gamma^m(f)(x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2)} \dots x_n^{(i_n)}) = f(x_1)^{(i_1)} f(x_2)^{(i_2)} \dots f(x_n)^{(i_n)}$.

Formy stopnia m na X w sensie N. Roby ([9]) są reprezentowane przez $\Gamma^m(X)$. Oznacza to, że moduł form stopnia m z X do Y jest izomorficzny z $Hom_R(\Gamma^m(X), Y)$, a w szczególności moduł form stopnia m z pierścienia $R[X_1, \dots, X_n]$ do R jest izomorficzny z $Hom_R(\Gamma^m(R^n), R)$. Warto zauważyć, że przyporządkowanie $X \longrightarrow \Gamma^m(X)$, $x \mapsto x^{(m)}$ jest regularnym m–odwzorowaniem, którego k–ty defekt () jest określony wzorem $(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(i)} x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}$, gdzie (i) oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich $i_1, \dots, i_k$, że $i_1 + \dots + i_k = m$. Na tych faktach opiera się wykorzystanie funktora Γ^m do znajdowania równości spełnianych przez odwzorowania stopnia m.

1.3. Procedura poszukiwania relacji

m–odwzorowania (odpowiednio regularne m–odwzorowania) tworzą klasę równościowo definiowalną $Appl^m$ (odpowiednio $\overline{Appl}^m$), która jest oczywiście ścisła. Klasę m–odwzorowań (odpowiednio regularnych m–odwzorowań) nad R będziemy oznaczali przez $Appl^m_R$ (odpowiednio $\overline{Appl}^m_R$). Niech $\Delta^m(X) = \Delta^m_R(X)$ (odpowiednio $\overline{\Delta}^m(X) = \overline{\Delta}^m_R(X)$) będzie R-modułem generowanym przez elementy $\delta^m(x), x \in X$ (odpowiednio $\overline{\delta}^m(x), x \in X$) z relacjami oznaczającymi, że $\delta^m : X \longrightarrow \Delta^m(X)$ (odpowiednio $\overline{\delta}^m : X \longrightarrow \overline{\Delta}^m(X)$) jest m-odwzorowaniem (odpowiednio regularnym m–odwzorowaniem). W przypadku $\overline{\delta}^m$ chodzi o relacje

(A1) $\overline{\delta}^m(rx) = r^m \overline{\delta}^m(x)$ dla $r \in R$, $x \in X$,

(A2) $\Delta^m \overline{\delta}^m : X^m \longrightarrow\!\!\!\rightarrow \overline{\Delta}^m(X)$ jest odwzorowaniem m-liniowym,

(A) $(rx, sy, -) - r(x, sy, -) - s(rx, y, -) + rs(x, y, -) = 0,$

gdzie $() = \Delta^{m-1}\overline{\delta}^m$.

Z definicji tej wynika, że regularne m-odwzorowanie f na X przedstawia się jednoznacznie w postaci $f = \widetilde{f} \circ \overline{\delta}^m$, gdzie $\widetilde{f}$ jest R-homomorfizmem. Oznacza to, że diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\overline{\delta}^m"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{\Delta}^m(X) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

jest przemienny, a więc $\widetilde{f}$ jest określony na generatorach wzorem $\widetilde{f}\left(\overline{\delta}^m(x)\right) = f(x)$. Z własności uniwersalności otrzymujemy, że $\overline{\Delta}^m_R$ jest funktorem, przy czym jeśli $f: X \longrightarrow Y$ jest homomorfizmem modułów, to $\overline{\Delta}^m(f) : \overline{\Delta}^m(X) \longrightarrow \overline{\Delta}^m(Y)$, $\overline{\Delta}^m(f)(\overline{\delta}^m(x)) = \overline{\delta}^m(f(x))$.

Stosując własność uniwersalności do regularnego m–odwzorowania $X \longrightarrow \Gamma^m(X)$, $x \mapsto x^{(m)}$, opisanego na końcu paragrafu 1.2, otrzymujemy

TWIERDZENIE 1.3 ([**5**], Corollary 2.2).

Określony jest następujący homomorfizm:

$\overline{h}^m = \overline{h}^m(X) : \overline{\Delta}^m(X) \longrightarrow \Gamma^m(X)$, $\overline{h}^m(\overline{\delta}^m(x)) = x^{(m)}$.

Ponadto $\overline{h}^m((\Delta^k\overline{\delta}^m)(x_1, \ldots, x_k)) = \sum\limits_{(i)} x_1^{(i_1)} \ldots x_k^{(i_k)}$, *gdzie* (i) *oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich* $i_1, \ldots, i_k$, *że* $i_1 + \ldots + i_k = m$.

Z podanych wzorów, że $\overline{h}^m$ wyznacza przekształcenie funktorów, tzn. jeśli $f: X \longrightarrow Y$ jest homomorfizmem modułów, to przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} \overline{\Delta}^m(X) \arrow[r, "\overline{h}^m"] \arrow[d, "\overline{\Delta}^m"] & \Gamma^m(X) \arrow[d, "\Gamma^m"] \\ \overline{\Delta}^m(Y) \arrow[r, "\overline{h}^m"] & \Gamma^m(Y) \end{tikzcd}$$

Niech $\{x_1, \ldots, x_k\}$ będzie bazą standardową modułu R^k, $k = 1, 2, \ldots$ Określamy

$$\Gamma^{m,k} = \Gamma^{m,k}(R) = R\{x_1^{(i_1)}...x_k^{(i_k)}; \sum i_j = m, i_j \geq 1\} \subset \Gamma^m(R^k),$$

$$\overline{\Delta}^{m,k} = \overline{\Delta}^{m,k}(R) = R\{(r_1 x_1, ..., r_k x_k); r_1, \ldots r_k \in R\} \subset \overline{\Delta}^m(R^k),$$

gdzie $() = \Delta^k \overline{\delta}^m$ oraz (i) oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich $i_1, \ldots, i_k$, że $i_1 + ... + i_k = m$. Ponadto określamy

$$\overline{h}^{m,k} = \overline{h}^m|_{\overline{\Delta}^{m,k}(R)} : \overline{\Delta}^{m,k}(R) \longrightarrow \Gamma^{m,k}(R),$$

$$\overline{h}^{m,k}(r_1 x_1, ..., r_k x_k) = \sum_{(i)} (r_1 x_1)^{(i_1)} \ldots (r_k x_k)^{(i_k)} = \sum_{(i)} r_1^{i_1} \ldots r_k^{i_k} x_1^{(i_1)} \ldots x_k^{(i_k)}.$$

W dalszej części pracy będziemy często pisali $((i_1, \ldots, i_k))$ zamiast $x_1^{(i_1)} \ldots x_k^{(i_k)}$. Pokazuje się, że $\Gamma^{m,k}(R)$ jest modułem wolnym o bazie $((i_1, \ldots, i_k)) = x_1^{(i_1)} \ldots x_k^{(i_k)}$, $i_j \geq 1$, $i_1 + \ldots + i_k = m$.

Ponieważ Δ^m jest funktorem, możemy podstawić dowolne elementy za elementy bazy $x_1, ..., x_k$, otrzymując R-homomorfizm na $\overline{\Delta}^m(R^k)$. W szczególności dowolna permutacja elementów $x_1, ..., x_k$ daje nam automorfizm modułu $\overline{\Delta}^m(R^k)$, a po ograniczeniu automorfizm $\overline{\Delta}^{m,k}(R)$. Innym przykładem jest np. podstawienie x_1 za x_k, które daje homomorfizm na $\overline{\Delta}^{m,k}(R) \longrightarrow \overline{\Delta}^{m,k-1}(R)$, $(r_1 x_1, \ldots, r_k x_k) \mapsto (r_1 x_1, \ldots, r_k x_1)$. Rzeczywiście, obrazem elementu $(r_1 x_1, \ldots, r_k x_k)$ jest element

$((r_1 + r_k) x_1, r_2 x_2 \ldots, r_{k-1} x_{k-1}) - (r_1 x_1, r_2 x_2 \ldots, r_{k-1} x_{k-1}) - (r_k x_1, r_2 x_2 \ldots, r_{k-1} x_{k-1})$, który należy do $\overline{\Delta}^{m,k-1}(R)$.

Pokazuje się ([**3**]), że równości dla klasy Hom_R^m składają się z tzw. k-równości (dla $k \geq 1$), które możemy wyrazić przy pomocy wartości defektu $\Delta^k f$. Otrzymujemy je znajdując generatory jądra $Ker\left(\overline{h}^{m,k}\right)$. W celu otrzymania równości z generatorów wystarczy ([**3**]) następująco zmienić znaczenie symboli $(r_1 x_1, ..., r_k x_k)$: $()$ oznacza $\Delta^k f$ zamiast $\Delta^k \overline{\delta}^m$ oraz $x_1, ..., x_k$ są dowolnymi elementami z dziedziny f. Mówimy wtedy, że są to $k-$równości dla klasy Hom_R^m. Jeśli są one ścisłe, to mówimy, że są to $k-$równości dla klasy Hom^m.

Jak wynika z [**3**], homomorfizm $\overline{h}^{m,k}$ jest izomorfizmem dla $k = 1$ i $k \geq m - 1$. To znaczy, że (A1), (A2) i (A) tworzą ścisły system k-równości klasy Hom_R^m dla tych k. System $k-$równości klasy Hom_R^m jest więc ścisły dla $k = 1$ oraz $k \geq m - 1$. Poza tym przypadkiem system ten jest ścisły jedynie dla $(m, k) = (4, 2), (5, 3)$ i (5,2) (patrz [**3**], Theorem 6.2). System taki został znaleziony dla (4,2) w pracy [**6**] oraz (5,3) w pracy [**2**]. Wypracowane w przypadku (4,2) i (5,3) metody nie nadają się do zastosowania w ostatnim niezbadanym przypadku (5,2). W związku z tym w niniejszej pracy za pomocą innej metody znajdziemy takie systemy zarówno dla (5,2), jak i (5,3). Osiągniemy to poprzez zbadanie $Ker\left(\overline{h}^{5,3}\right)$ oraz $Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right)$. Generatory jądra $Ker\left(\overline{h}^{5,3}\right)$ zostały znalezione w rozdziale trzecim, natomiast generatory jądra $Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right)$ zostały znalezione w rozdziale czwartym.

ROZDZIAŁ 2

Ideały $I_n(R)$

Mówimy, że ideał I pieścienia przemiennego z jedynką R ma indeks $n < \infty$, o ile $|R/I| = n$. A zatem w pierścieniu R wyróżniamy klasę ideałów skończonego indeksu $id(R) = \{I \subset R; |R/I| < \infty\}$. Niech $max(R)$ oznacza zbiór ideałów maksymalnych skończonego indeksu.

Podstawową rolę w dalszych rozważaniach będą odgrywały zdefiniowane w [4] ideały

$$I_n(R) = (r^n - r;\ r \in R) = (r^n s - rs^n;\ r, s \in R).$$

Równość obu postaci wynika z tego, że $r^n s - rs^n = s(r^n - r) - r(s^n - s)$. Przypomnijmy podstawowe własności tych ideałów udowodnione w [4]. Ideał $I_n(R)$ jest zachowany przy przejściu do pierścienia ułamków i pierścienia ilorazowego. Inaczej mówiąc, mamy następujący

Lemat 2.1 ([4], Lemma 5.1).

$I_n(R_S) = I_n(R)_S,\ I_n(R/J) = (I_n(R) + J)/J.$

Poza tym mamy następującą charakteryzację:

Twierdzenie 2.1 ([4], Proposition 5.5).

$I_n(R) = \bigcap\{M \in max(R); |R/M| - 1 | n - 1\}.$

W dalszej części pracy szczególne znaczenie będą miały ideały $I(R) = I_2(R)$, $I_3(R)$, $I_4(R)$. Z powyższego twierdzenia mamy

WNIOSEK 2.1.

Zachodzą następujące równości:

$I_2(R) = \bigcap\{M \in max(R); |R/M| = 2\}$,

$I_3(R) = \bigcap\{M \in max(R); |R/M| = 2 \text{ lub } 3\}$,

$I_4(R) = \bigcap\{M \in max(R); |R/M| = 2 \text{ lub } 4\}$.

WNIOSEK 2.2.

Jeżeli R jest pierścieniem lokalnym o ideale maksymalnym M, to zachodzi jeden z dwóch warunków:

(1) $I_n(R) = M$, gdy $|R/M| - 1 | n - 1$

lub

(2) $I_n(R) = R$, gdy $|R/M| - 1 \not| n - 1$.

W szczególności

(a) $I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2$,

(b) $I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2 \text{ lub } 3$,

(c) $I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2 \text{ lub } 4$.

2.1. Relacje pomiędzy elementami $r^2 - r$

Głównym wynikiem pracy [8] jest następujące

TWIERDZENIE 2.2.

Niech $C(R)$ będzie R-modułem generowanym przez elementy $[r], r \in R$, z relacjami

(1) $[r + s] = [r] + [s] + rs[2], \; r, s \in R$,

(2) $[rs] = r^2[s] + s[r], \; r, s \in R$.

Wtedy istnieje R-izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I(R)$, *taki że*

$P([r]) = r^2 - r$ *dla* $r \in R$.

Inaczej mówiąc, ideał $I(R) = I_2(R)$ jest generowany przez elementy $[r] = r^2 - r$ z relacjami (1) i (2). W dalszych rozważaniach będzimy potrzebować analogicznych twierdzeń dla elementów $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$. W tym celu uogólnimy powyższe twierdzenie dla wykładników będących potęgami dwójki, a następnie udowodnimy analogiczne twierdzenie dla elementów $r^3 - r$.

2.2. Relacje pomiędzy elementami $r^n - r$, gdzie $n = 2^l, l = 1, 2, 3, \ldots$

Niech n będzie ustaloną liczbą postaci $n = 2^l$, $l = 1, 2, \ldots$ Udowodnimy, że relacje generujące pomiędzy elementami $[r] = r^n - r$ pierścienia przemiennego R są następujące:

(1) $[r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1]$, $r, s \in R$,
gdzie $p(r, s) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k$,

(2) $[rs] = r^n[s] + s[r]$, $r, s \in R$.

Należy zwrócić uwagę, że liczby $\frac{1}{2}\binom{n}{k}$ w powyższej sumie są całkowite, gdyż $n = 2^l$ oraz $0 < k < n$.

Niech $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oznaczają nieujemne liczby całkowite i niech $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ oznacza uogólniony symbol Newtona,

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_k)!}{i_1! i_2! \ldots, i_k!}.$$

Wprost z definicji wynika następujący

WNIOSEK 2.3.

Dla dowolnych $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \mathbb{N}$ *mamy:*

(1) $(i_1, i_2, \ldots, i_k, 0) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$,

(2) $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}) = (i_1 + i_2 + \ldots + i_k, i_{k+1})(i_1, i_2, \ldots, i_k)$,

(3) $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \binom{i_1+i_2+\ldots+i_k}{i_k}\binom{i_1+i_2+\ldots+i_{k-1}}{i_{k-1}}\ldots\binom{i_1+i_2}{i_2}$,

(4) *jeśli* $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 2^l$, *oraz co najmniej dwa z indeksów* i_j *są niezerowe,*

to $\frac{1}{2}(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}$.

Niech teraz $p(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \sum_I \frac{1}{2}(i_1, i_2, \ldots, i_k) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \ldots r_k^{i_k}$, gdzie $\sum_I$ oznacza sumę po zbiorze I tych układów indeksów nieujemnych liczb całkowitych $i_1, i_2, \ldots, i_k$, że $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$ oraz co najmniej dwa z indeksów i_j są niezerowe. W szczególności przy $k = 2$ otrzymujemy poprzednią wartość $p(r, s) = = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\binom{n}{k} r^{n-k} s^k$. W dalszej części wykorzystamy uogólniony wzór Newtona

$$(r_1 + r_2 + \ldots r_k)^m = \sum_{i_1+\ldots+i_k=m} (i_1, i_2, \ldots, i_k) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \ldots r_k^{i_k}, \tag{2.1}$$

gdzie jak poprzednio zakładamy, że $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oznaczają nieujemne liczby całkowite. Z Wniosku 2.3 oraz wzoru (2.1) otrzymujemy następujący

LEMAT 2.2.

Dla dowolnych $r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1} \in R$ *mamy*

$$p(r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}) = p(r_1 + r_2 + \ldots + r_k, r_{k+1}) + p(r_1, r_2, \ldots, r_k).$$

DOWÓD.

Z definicji mamy

$$p(r_1 + r_2 + \ldots + r_k, r_{k+1}) = \sum_{\substack{j_1+j_2=n \\ j_1, j_2>0}} \frac{1}{2}(j_1, j_2)(r_1 + r_2 + \ldots + r_k)^{j_1} r_{k+1}^{j_2}.$$

Na mocy wzoru (2.1) wyrażenie to jest równe

$$\sum_{\substack{j_1+j_2=n\\ j_1,j_2>0}} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=j_1} \tfrac{1}{2}(j_1,j_2)(i_1,\ldots,i_k)(r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot r_k^{i_k})r_{k+1}^{j_2} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{k+1}=n\\ i_1+\ldots+i_k>0,i_{k+1}>0}} \tfrac{1}{2}(i_1+\ldots+i_k,i_{k+1})(i_1,\ldots,i_k)r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot r_k^{i_k}r_{k+1}^{i_{k+1}} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{k+1}=n\\ i_1+\ldots+i_k>0,i_{k+1}>0}} \tfrac{1}{2}(i_1,\ldots,i_k,i_{k+1})r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot r_{k+1}^{i_{k+1}}.$$

Otrzymaliśmy więc sumę po wszystkich takich układach indeksów $i_1,\ldots,i_{k+1}$, wśród których przynajmniej dwa są większe od zera, przy czym jednym z nich jest i_{k+1}. Wobec tego ostatnie wyrażenie, dzięki Wnioskowi 2.3 (1), jest to różnicą $p(r_1,r_2,\ldots,r_k,r_{k+1}) - p(r_1,r_2,\ldots,r_k)$, co dowodzi tezy.

2.2.1. C-funkcje.

DEFINICJA 2.1.

$C-$funkcją nad R będziemy nazywać taką funkcję $f : R \longrightarrow M$, gdzie M jest R-modułem, która spełnia następujące warunki:

(1) $f(r+s) = f(r) + f(s) + p(r,s)f(-1),\ r,s \in R,$

(2) $f(rs) = r^n f(s) + sf(r),\ r,s \in R,$

gdzie $p(r,s) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\binom{n}{k} r^{n-k}s^k$.

LEMAT 2.3.

Jeśli f jest $C-$funkcją, to dla dowolnych $r,s \in R$ mamy

(3) $(r^n - r)f(s) = (s^n - s)f(r),$

(4) $2f(r) = (r^n - r)f(-1),$

(5) $f(0) = f(1) = 0,$

(6) jeżeli s jest elementem odwacalnym, to $f(s^{-1}) = -s^{-n-1}f(s)$.

DOWÓD.

Relację (3) otrzymujemy odejmując stronami dwie symetryczne wersje (2).

Relację (4) otrzymujemy z (3), przyjmując $s = -1$ i korzystając z tego, że n jest parzyste. Równości $f(0) = f(1) = 0$ otrzymujemy kładąc w (2) $r = s = 0$ lub 1. Niech s będzie odwracalne. Ponieważ dzięki (2) mamy $0 = f(1) = f(s \cdot s^{-1}) =$ $= s^n f(s^{-1}) + s^{-1} f(s)$, więc $s^n f(s^{-1}) = -s^{-1} f(s)$. Po pomnożeniu przez s^{-n} otrzymujemy $f(s^{-1}) = -s^{-n-1} f(s)$. □

Uogólnieniem (1) jest następujący

LEMAT 2.4.

Dla dowolnych $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R$, $k \geq 2$ zachodzi następujący wzór:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} r_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f(r_i) + p(r_1, r_2, \ldots, r_k) f(-1).$$

DOWÓD.

Stosujemy indukcję względem k.

Na mocy warunku (1) wzór zachodzi dla $k = 2$.

Jeśli wzór zachodzi dla pewnego $k \geq 2$, to

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} r_i + r_{k+1}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} r_i\right) + f(r_{k+1}) + p\left(\sum_{i=1}^{k} r_i, r_{k+1}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(r_i) + p(r_1, r_2, \ldots, r_k) f(-1) + f(r_{k+1}) + p(r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}) f(-1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} f(r_i) + p(r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}) f(-1)$$

dzięki Lematowi 2.2. □

PRZYKŁAD 2.1.

Określamy $f : R \longrightarrow R$ wzorem $f(r) = r^n - r$. Wówczas f jest C–funkcją.

Pokażemy, że elementy $r^n - r$ spełniają relacje (1)-(2).

(1) Ponieważ $(-1)^n - (-1) = 2$, więc ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:
$(r+s)^n - (r+s) - (r^n - r) - (s^n - s) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k}s^k - r^n - s^n =$
$= 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\binom{n}{k} r^{n-k}s^k = 2p(r,s) = p(r,s)f(-1),$
(2) $(rs)^n - rs - r^n(s^n - s) - s(r^n - r) = 0.$

2.2.2. Funktor C.

DEFINICJA 2.2.

Niech $C(R) = C^{(n)}(R)$ będzie R-modułem generowanym przez elementy $[r]$, $r \in R$, z relacjami:

(1) $[r+s] = [r] + [s] + p(r,s)[-1]$, $r,s \in R$,

(2) $[rs] = r^n[s] + s[r]$, $r,s \in R$.

Dokładniej, $C(R) = F(R)/K(R)$, gdzie $F(R)$ jest R–modułem wolnym o bazie $\{\overline{r};\ r \in R\}$, a $K(R)$ jest podmodułem generowanym przez elementy

(1) $\overline{r+s} - \overline{r} - \overline{s} - p(r,s)\overline{-1}$, $r,s \in R$,

(2) $\overline{rs} - r^n\overline{s} - s\overline{r}$, $r,s \in R$

i przyjmujemy $[r] = \overline{r} + K(R)$. Odwzorowanie $c : R \longrightarrow C(R)$ określone wzorem $c(r) = [r]$ jest oczywiście C–funkcją, którą będziemy nazywać kanoniczną C–funkcją. Zauważmy, że $C(R)$ jest obiektem uniwersalnym ze względu na C–funkcje, co oznacza, że dowolna C-funkcja może być jednoznacznie przedstawiona jako złożenie kanonicznej C-funkcji $c : R \longrightarrow C(R)$, $c(r) = [r]$, oraz R-homomorfizmu określonego na $C(R)$. Dokładniej, mamy następujące

TWIERDZENIE 2.3.

Niech $f : R \longrightarrow M$, gdzie M jest R–modułem, będzie C–funkcją. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm R–modułów $\overline{f} : C(R) \longrightarrow M$, taki że diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"'] & C(R) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Jest on określony na generatorach wzorem $\overline{f}([r]) = f(r)$.

DOWÓD.

Z przemienności wynika wzór, a więc także jedyność. Wykażemy istnienie $\overline{f}$. Uzupełnimy diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F(R) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "g"] & C(R) \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

w którym $i : R \longrightarrow F(R)$ jest określone wzorem $i(r) = \overline{r}$, natomiast $\nu : F(R) \longrightarrow C(R)$ jest homomorfizmem naturalnym. Oczywiście f przedłuża się do homomorfizmu g na $F(R)$, określonego na elementach bazy wzorem $g(\overline{r}) = f(r)$, a na dowolnym elemencie wzorem $g\left(\sum a_i\overline{r_i}\right) = \sum a_i f(r_i)$. Ponieważ f jest C–funkcją, więc wszystkie generatory modułu $K(R)$ przechodzą poprzez g w zero. Istnieje więc homomorfizm indukowany $\overline{f} : C(R) \longrightarrow M$ określony na generatorach wzorem $\overline{f}([r]) = g(\overline{r}) = f(r)$, czyli taki, że rozważany diagram jest przemienny. □

Niech $i : R \longrightarrow R'$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z jedynką. Rozważmy diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "c"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr] & C(R) \arrow[d, dashed, "C(i)"] \\ R' \arrow[r, "c'"'] & C(R') \end{tikzcd}$$

Ponieważ $C(R')$ jest R'–modułem, więc jest również R–modułem przez cofnięcie względem i, z działaniem mnożenia określonym wzorem $rm = i(r)m$. Zauważmy, że złożenie $c' \circ i$ jest C–funkcją nad R. Istotnie,

$$(c' \circ i)(r+s) = c'(i(r+s)) = c'(i(r)+i(s)) =$$
$$= c'(i(r)) + c'(i(s)) + p(i(r), i(s))c'(i(-1)) =$$
$$= (c' \circ i)(r) + (c' \circ i)(s) + p(i(r), i(s))c'(-1),$$
$$(c' \circ i)(rs) = c'(i(rs)) = c'(i(r)i(s)) = i(r)^n c'(i(s)) + i(s)c'(i(r)) =$$
$$= r^n(c' \circ i)(s) + s(c' \circ i)(r).$$

Zatem homomorfizm pierścieni z jedynką $i : R \longrightarrow R'$ indukuje homomorfizm R–modułów $C(i) : C(R) \longrightarrow C(R')$ określony na generatorach wzorem $C(i)([r]) = [i(r)]$. Jest to homomorfizm modułów nad i, co oznacza, że $C(i)(x+y) = C(i)(x) + C(i)(y)$ oraz $C(i)(rx) = i(r)C(i)(x)$.

Określamy kategorię par w następujący sposób: obiektami są pary (R, M), gdzie R jest pieścieniem przemiennym z jedynką, a M jest R–modułem, natomiast odwzorowaniami są pary (i, j), gdzie $i : R \longrightarrow R'$ jest homomorfizmem pierścieni z jedynką, natomiast $j : M \longrightarrow M'$ jest homomorfizmem modułów nad i. Ponieważ oczywiście $C(ji) = C(j)C(i)$ oraz $C(id_R) = id_{C(R)}$, więc C jest funktorem z kategorii pierścieni przemiennych z jedynką do kategorii par, przyporządkowującym pierścieniowi R parę $(R, C(R))$, a homomorfizmowi $i : R \longrightarrow R'$ parę $(i, C(i))$.

2.2.3. Przemienność C z lokalizacjami. Pokażemy, że funktor C komutuje z lokalizacjami. Niech S będzie zbiorem multiplikatywnym w R i niech $i : R \longrightarrow R_S$ oraz $i : M \longrightarrow M_S$ będą homomorfizmami kanonicznymi, określonymi wzorami $i(r) = \frac{r}{1}$, $i(m) = \frac{m}{1}$.

TWIERDZENIE 2.4.

Dla dowolnej C-funkcji $f : R \longrightarrow M$ istnieje jedyna C-funkcja $f_S : R_S \longrightarrow M_S$ spełniająca warunek $f_S(i(r)) = i(f(r))$ dla $r \in R$, tzn. uzupełniająca diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_S \\ \downarrow f & & \downarrow f_S \\ M & \xrightarrow{i} & M_S \end{array}$$

do diagramu przemiennego. Jest ona dana wzorem

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s} \tag{2.2}$$

lub równoważnie

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Zachodzi również następująca równość:

$$(\Delta^2 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^n}. \tag{2.4}$$

DOWÓD.

Zauważmy najpierw, że prawe strony wzorów (2.2) i (2.3) są identyczne dla dowolnej C–funkcji f. Ich równość wynika stąd, że

$\frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s} = \frac{(s^n - s)f(r) - (r^n - r)f(s) + sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}} = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}}$

dzięki Lematowi 2.3 (3).

Załóżmy, że istnieje uzupełnienie powyższego diagramu. Warunek przemienności oznacza, że $f_S\left(\frac{r}{1}\right) = \frac{f(r)}{1}$ dla $r \in R$. Niech $s \in S$. Jeżeli f_S jest C-funkcją, to

$\frac{f(r)}{1} = f_S\left(\frac{r}{1}\right) = f_S\left(\frac{r}{s}\frac{s}{1}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^n f_S\left(\frac{s}{1}\right) + \frac{s}{1} f_S\left(\frac{r}{s}\right) =$

$= \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{1} + \frac{s}{1} f_S\left(\frac{r}{s}\right),$

skąd wynika wzór (2.2). To dowodzi jedyności f_S.

Określamy teraz f_S wzorem (2.2). Żeby udowodnić, że f_S jest poprawnie określona, zauważmy najpierw, że dzięki (2) mamy

$$\frac{f(rt)}{st} - \left(\frac{rt}{st}\right)^n \frac{f(st)}{st} = \frac{r^n f(t)+tf(r)}{st} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{s^n f(t)+tf(s)}{st} = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s}.$$

Oznacza to, że po prawej stronie wzoru (2.2) orzymujemy to samo, jeżeli zastąpimy r przez rt i s przez st dla dowolnego $t \in S$.

Niech teraz $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$. Wówczas istnieje takie $t \in S$, że $rs't = r'st$. Ale $\frac{r}{s} = \frac{rs't}{ss't}$ oraz $\frac{r'}{s'} = \frac{r'st}{s'st}$. Ponieważ liczniki i mianowniki po prawych stronach są odpowiednio równe, więc z poprzedniego rachunku wynika, że prawe strony wzoru (2.2) dla $\frac{r}{s}$ i $\frac{r'}{s'}$ są identyczne.

Dla dowodu wzoru (2.4) zauważmy, że $f(0) = 0$, więc na mocy wzoru (2.3) mamy

$$\begin{aligned}(\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r}{t}, \tfrac{s}{t}\right) &= f_S\left(\tfrac{r+s}{t}\right) - f_S\left(\tfrac{r}{t}\right) - f_S\left(\tfrac{s}{t}\right) = \\ &= \frac{tf(r+s)-(r+s)f(t)}{t^{n+1}} - \frac{tf(r)-rf(t)}{t^{n+1}} - \frac{tf(s)-sf(t)}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{t(f(r+s)-f(r)-f(s))}{t^{n+1}} = \frac{(\Delta^2 f)(r,s)}{t^n}.\end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić warunki (1) i (2) dla f_S. Zauważmy, że dzięki przemienności diagramu mamy $f_S(-1) = f_S(\frac{-1}{1}) = \frac{f(-1)}{1}$, a z drugiej strony

$$p\left(\tfrac{a}{s}, \tfrac{b}{s}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{2} \binom{n}{k} \left(\tfrac{a}{s}\right)^{n-k} \left(\tfrac{b}{s}\right)^k = \frac{p(a,b)}{s^n}.$$

Niech $\frac{a}{s}$ i $\frac{b}{s}$ będą dowolnymi elementami R_S.

(1) Korzystając ze wzoru (2.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}f_S\left(\tfrac{a}{s} + \tfrac{b}{s}\right) - f_S\left(\tfrac{a}{s}\right) - f_S\left(\tfrac{b}{s}\right) &= (\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{a}{s}, \tfrac{b}{s}\right) = \\ &= \frac{(\Delta^2 f)(a,b)}{s^n} = \frac{p(a,b)f(-1)}{s^n} = p\left(\tfrac{a}{s}, \tfrac{b}{s}\right) f_S(-1).\end{aligned}$$

(2) Korzystając ze wzoru (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}f_S\left(\tfrac{a}{s}\tfrac{b}{s}\right) - \left(\tfrac{a}{s}\right)^n f_S\left(\tfrac{b}{s}\right) - \tfrac{b}{s} f_S\left(\tfrac{a}{s}\right) &= \\ &= \frac{s^2 f(ab)-abf(s^2)}{s^{2n+2}} - \frac{a^n}{s^n}\frac{sf(b)-bf(s)}{s^{n+1}} - \frac{b}{s}\frac{sf(a)-af(s)}{s^{n+1}} = \\ &= \frac{s^2 f(ab)-abf(s^2)}{s^{2n+2}} - \frac{a^n s^2 f(b)-a^n bsf(s)}{s^{2n+2}} - \frac{bs^{n+1} f(a)-abs^n f(s)}{s^{2n+2}} = \\ &= \frac{s^2(f(ab)-a^n f(b)-s^{n-1}bf(a))-ab(f(s^2)-a^{n-1}sf(s)-s^n f(s))}{s^{2n+2}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{s^2(b-bs^{n-1})f(a)-ab(s-sa^{n-1})f(s)}{s^{2n+2}} = \frac{bs((s-s^n)f(a)-(a-a^n)f(s))}{s^{2n+2}} = 0$$

dzięki (2) i (3) dla f. To kończy dowód. □

TWIERDZENIE 2.5.

Istnieje R_S-izomorfizm $C(R)_S \approx C(R_S)$, taki że $\frac{[r]}{s} \leftrightarrow \frac{1}{s}\left[\frac{r}{1}\right]$.

DOWÓD.

Stosując Twierdzenie 2.4 do kanonicznej C-funkcji $c : R \longrightarrow C(R)$, $c(r) = [r]$, otrzymujemy C-funkcję nad R_S określoną następująco:

$$c_S : R_S \longrightarrow C(R)_S,\ c_S\left(\tfrac{r}{s}\right) = \tfrac{[r]}{s} - \left(\tfrac{r}{s}\right)^n \tfrac{[s]}{s}.$$

Z Twierdzenia 2.3 mamy R_S-homomorfizm $g : C(R_S) \longrightarrow C(R)_S$, określony wzorem $g\left(\left[\frac{r}{s}\right]\right) = c_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{[r]}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{[s]}{s}$. Z drugiej strony mamy homomorfizm $C(i) : C(R) \longrightarrow C(R_S)$ nad $i : R \longrightarrow R_S$, taki, że $C(i)([r]) = \left[\frac{r}{1}\right]$, który daje nam dzięki uniwersalności lokalizacji R_S-homomorfizm $h : C(R)_S \longrightarrow C(R_S)$, taki że $h\left(\frac{[r]}{s}\right) = \frac{1}{s}\left[\frac{r}{1}\right]$.

Zauważmy, że $h = g^{-1}$. Istotnie,

$$g\left(h\left(\tfrac{[r]}{s}\right)\right) = \tfrac{1}{s} g\left(\left[\tfrac{r}{1}\right]\right) = \tfrac{1}{s}\left(\tfrac{[r]}{1} - \left(\tfrac{r}{1}\right)^n \tfrac{[1]}{1}\right) = \tfrac{[r]}{s}$$

dzięki (5). Z drugiej strony, dzięki (7) i (2) obliczamy, że

$$h\left(g\left(\left[\tfrac{r}{s}\right]\right)\right) = h\left(\tfrac{[r]}{s} - \left(\tfrac{r}{s}\right)^n \tfrac{[s]}{s}\right) = \tfrac{1}{s}\left[\tfrac{r}{1}\right] - \tfrac{r^n}{s^{n+1}}\left[\tfrac{s}{1}\right] = \tfrac{1}{s}\left[\tfrac{r}{1}\right] + \left(\tfrac{r}{1}\right)^n \left[\tfrac{1}{s}\right] = \left[\tfrac{r}{1}\tfrac{1}{s}\right] = \left[\tfrac{r}{s}\right].$$

Stąd h jest izomorfizmem. □

2.2.4. Homomorfizm P. Przypomnimy, że z Przykładu 2.1 mamy C–odwzorowanie $f : R \longrightarrow R$ określone wzorem $f(r) = r^n - r$. Zatem dzięki uniwersalności $C(R)$ istnieje R–homomorfizm $P = P(R) : C(R) \longrightarrow R$ uzupełniający diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"'] & C(R) \arrow[d, dashed, "P"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Jest on określony na generatorach wzorem $P([r]) = r^n - r$ i jego obrazem jest $I_n(R)$. Homomorfizmy $P(R)$ wyznaczają przekształcenie funktorów, tzn. dla dowolnego homomorfizmu pierścieni $i : R \longrightarrow R'$ następujący diagram

$$\begin{tikzcd} C(R) \arrow[r, "P(R)"] \arrow[d, "C(i)"] & R \arrow[d, "i"] \\ C(R') \arrow[r, "P(R')"] & R' \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Rzeczywiście,

$$P(R')\,(C(i)([r])) = P(R')([i(r)]) = (i(r))^n - i(r) = i(r^n - r) = i(P(R)[r]).$$

Pokażemy, że P jest monomorfizmem dla dowolnego pierścienia R.

LEMAT 2.5.

Dla dowolnego zbioru multiplikatywnego S pierścienia przemiennego R mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} C(R)_S \arrow[d, "f"', "\cong"] \arrow[dr, "P(R)_S"] & \\ C(R_S) \arrow[r, "P(R_S)"'] & R_S \end{tikzcd}$$

gdzie f jest izomorfizmem z Twierdzenia 2.5. Zatem $P(R)_S$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $P(R_S)$ jest monomorfizmem.

DOWÓD.

$$P(R_S)\left(f\left(\frac{[r]}{s}\right)\right) = P(R_S)(\tfrac{1}{s}[\tfrac{r}{1}]) = \tfrac{1}{s}\left((\tfrac{r}{1})^n - \tfrac{r}{1}\right) = \tfrac{r^n - r}{s} = \tfrac{P(R)([r])}{s} = P(R)_S\left(\frac{[r]}{s}\right).$$

□

Zauważmy, że

$$\left[r^2\right] = [r \cdot r] = r^n[r] + r[r] = (r^n + r)[r].$$

Podstawiając r^{2^k} za r otrzymujemy następujący wzór rekurencyjny:

$$\left[r^{2^{k+1}}\right] = \left(\left(r^{2^k}\right)^n + r^{2^k}\right)[r^{2^k}].$$

W szczególności otrzymujemy

WNIOSEK 2.4.

Niech $r \in R$. Wtedy

$[r^n] = \left[r^{2^l}\right] = \left(\left(r^{2^{l-1}}\right)^n + r^{2^{l-1}}\right)\left(\left(r^{2^{l-2}}\right)^n + r^{2^{l-2}}\right)\ldots(r^n + r)\,[r].$

Rozważmy jądro R-homomorfizmu $P : C(R) \longrightarrow R$, $P([r]) = r^n - r$ dla $r \in R$.

LEMAT 2.6.

$I_n(R)Ker(P) = 0.$

DOWÓD.

Niech $x = \sum_i a_i[r_i] \in Ker(P)$, to jest $\sum_i a_i(r_i^n - r_i) = 0$. Wtedy dzięki Lematowi 2.3 (3) otrzymujemy, że

$(r^n - r)x = \sum_i a_i(r^n - r)[r_i] = \sum_i a_i(r_i^n - r_i)[r] = 0[r] = 0.$ □

Przypomnijmy, że na mocy Lematu 2.4 dla dowolnych $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R$, $k \geq 2$ zachodzi następujący wzór:

$$\left[\sum_{i=1}^{k} r_i\right] = \sum_{i=1}^{k} [r_i] + p(r_1, r_2, \ldots, r_k)[-1]. \tag{2.5}$$

LEMAT 2.7.

Niech $x = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i[r_i] \in Ker(P)$, gdzie jeden z r_i jest równy -1. Jeżeli wszystkie a_i należą do $I_n(R)^m$ dla pewnego $m \geq 0$, to $x = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i[r_i]$, gdzie wszystkie b_i należą do $I_n(R)^{nm+1}$.

DOWÓD.

Z założenia $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i r_i^n = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i r_i$. Na mocy wzoru (2.5) otrzymujemy

$\left[\sum\limits_{i=1}^{k} a_i r_i\right] = \sum\limits_{i=1}^{k}[a_i r_i] + p[-1] = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i[r_i] + \sum\limits_{i=1}^{k} r_i^n[a_i] + p[-1],$

$\left[\sum\limits_{i=1}^{k} a_i r_i^n\right] = \sum\limits_{i=1}^{k}[a_i r_i^n] + q[-1] = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n[r_i^n] + \sum\limits_{i=1}^{k} r_i^n[a_i] + q[-1],$

gdzie

$$p = p(a_1r_1,\dots,a_kr_k) = \sum_I \tfrac{1}{2}(i_1,i_2,\dots,i_k)(a_1r_1)^{i_1}(a_2r_2)^{i_2}\dots(a_kr_k)^{i_k} =$$
$$= \sum_I \tfrac{1}{2}(i_1,i_2,\dots,i_k)a_1^{i_1}a_2^{i_2}\dots a_k^{i_k}r_1^{i_1}r_2^{i_2}\dots r_k^{i_k}$$
$$q = p(a_1r_1^n,\dots,a_kr_k^n) = \sum_I \tfrac{1}{2}(i_1,i_2,\dots,i_k)\,(a_1r_1^n)^{i_1}\,(a_2r_2^n)^{i_2}\dots(a_kr_k^n)^{i_k} =$$
$$= \sum_I \tfrac{1}{2}(i_1,i_2,\dots,i_k)a_1^{i_1}a_2^{i_2}\dots a_k^{i_k}\left(r_1^{i_1 n}r_2^{i_2 n}\dots r_k^{i_k}\right)^n,$$

przy czym $\sum_I$ oznacza sumę po zbiorze I tych układów indeksów nieujemnych liczb całkowitych $i_1,\dots,i_k$, że $i_1+\dots+i_k = n$ oraz co najmniej dwa z indeksów i_j są niezerowe. Ponieważ

$$\sum_{i=1}^k a_i^n[r_i^n] + \sum_{i=1}^k r_i^n[a_i] + q[-1] = \sum_{i=1}^k a_i[r_i] + \sum_{i=1}^k r_i^n[a_i] + p[-1],$$

więc otrzymujemy

$$x = \sum_{i=1}^k a_i[r_i] = \sum_i^k a_i^n[r_i^n] + (q-p)[-1] =$$
$$= \sum_{i=1}^k a_i^n\left(\left(r_i^{2^{l-1}}\right)^n + r_i^{2^{l-1}}\right)\left(\left(r_i^{2^{l-2}}\right)^n + r_i^{2^{l-2}}\right)\dots(r_i^n + r_i)\,[r_i] + (q-p)[-1],$$

na mocy Wniosku 2.4.

Ponieważ $a_i \in I_n(R)^m$, więc $a_i^n \in I_n(R)^{nm}$ oraz $r_i^n + r_i = (-r_i)^n - (-r_i) \in I_n(R)$, bo n jest parzyste. Stąd

$$a_i^n\left(\left(r_i^{2^{m-1}}\right)^n + r_i^{2^{m-1}}\right)\left(\left(r_i^{2^{m-2}}\right)^n + r_i^{2^{m-2}}\right)\dots(r_i^n + r_i) \in I_n(R)^{nm+1}.$$

Zauważmy również, że $a_1^{i_1}a_2^{i_2}\dots a_k^{i_k} \in I_n(R)^{nm}$, bo $a_i \in I_n(R)^m$ oraz $i_1+\dots+i_k = n$, a także $\left(r_1^{i_1}r_2^{i_2}\dots r_k^{i_k}\right)^n - r_1^{i_1}r_2^{i_2}\dots r_k^{i_k} \in I_n(R)$. Stąd

$$q-p = \sum_I \tfrac{1}{2}(i_1,i_2,\dots,i_k)a_1^{i_1}a_2^{i_2}\dots a_k^{i_k}\left(\left(r_1^{i_1}r_2^{i_2}\dots r_k^{i_k}\right)^n - r_1^{i_1}r_2^{i_2}\dots r_k^{i_k}\right) \in I_n(R)^{nm+1}.$$

To kończy dowód. □

Z Lematu 2.7 otrzymujemy następujący

WNIOSEK 2.5.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i[r_i] \in Ker(P)$ *i niech* M *oznacza podmoduł modułu* $C(R)$ *generowany przez* $[r_1],\dots,[r_k]$ *i* $[-1]$. *Wtedy* $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} I_n(R)^m M$.

DOWÓD.

Teza wynika z tego, że $nm + 1 > m$ dla $m \geq 0$, a podmoduły $I_n(R)^m M$ tworzą ciąg zstępujący. □

2.2.5. Zasadnicze twierdzenie. Głównym wynikiem tego paragrafu jest następujące

TWIERDZENIE 2.6.

Niech $n = 2^l$, $l = 1, 2, \ldots$ oraz $C(R) = C^{(n)}(R)$ będzie R-modułem generowanym przez elementy $[r], r \in R$, z relacjami:

(1) $[r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1]$, $r, s \in R$,

(2) $[rs] = r^n[s] + s[r]$, $r, s \in R$.

Wtedy istnieje R-izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I_n(R)$, taki że $P([r]) = r^n - r$ dla $r \in R$.

DOWÓD.

Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek lokalny noetherowski.

Załóżmy, że R jest pierścieniem lokalnym i noetherowskim. Z Wniosku 2.2 wynika, że mamy dwa przypadki:

przypadek 1: $I_n(R) = R$. Wtedy dzięki Lematowi 2.6 otrzymujemy, że $Ker(P) = 0$.

przypadek 2: $I_n(R)$ jest ideałem maksymalnym pierścienia R. Niech $x \in Ker(P)$. Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.5 i zauważamy, że jest on modułem skończenie generowanym nad lokalnym pierścieniem noetherowskim R. Wtedy przekrój we wniosku jest zerowy dzięki twierdzeniu Krulla o przekroju i w konsekwencji $x = 0$. To dowodzi, że $Ker(P) = 0$.

Przypadek noetherowski.

Załóżmy, że pierścień R jest noetherowski. Wtedy wszystkie jego lokalizacje względem ideałów pierwszych są lokalne i noetherowskie. Z poprzedniego przypadku i z Lematu 2.5 mamy, że P jest takim homomorfizmem, który po lokalizacji względem dowolnego ideału pierwszego jest monomorfizmem, a zatem P jest monomorfizmem.

Przypadek ogólny.

Niech $x = \sum_i a_i[r_i] \in Ker(P)$. Określamy podpierścień S pierścienia R generowany przez wszystkie elementy a_i i r_i. Ponieważ S jest skończenie generowany, więc jest noetherowski, a zatem na mocy poprzedniego przypadku $P : C(S) \longrightarrow S$ jest monomorfizmem. Niech $i : S \longrightarrow R$ będzie włożeniem. Ponieważ P jest przekształceniem funktorów, więc mamy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} C(S) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "C(i)"] & S \arrow[d, hook, "i"] \\ C(R) \arrow[r, "P"] & R \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że $x = (C(i))\,(y)$, gdzie $y = \sum_i a_i[r_i] \in C(S)$.

Ponieważ $0 = P(x) = P(C(i)(y)) = i(P(y))$, więc $P(y) = 0$, bo i jest włożeniem. Z poprzedniego przypadku wynika, że $y = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. To kończy dowód. □

WNIOSEK 2.6.

Jeżeli $n = 2^l$, $l = 1, 2, \ldots$, to relacje generujące pomiędzy generatorani $[r] = r^n - r$ ideału $I_n(R)$ są następujące:

(1) $[r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1], \; r, s \in R,$

gdzie $p(r, s) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k,$

(2) $[rs] = r^n[s] + s[r], \; r, s \in R.$

2.3. Relacje pomiędzy elementami $r^3 - r$

W tym paragrafie znajdziemy relacje generujące pomiędzy elementami $\{r\} = r^3 - r$ pierścienia przemiennego R. W tym celu przeprowadzimy analogiczne rozumowanie, jak w poprzednim paragrafie. W związku z tym będziemy używać podobnych oznaczeń i terminów.

2.3.1. C-funkcje i Funktor C.

DEFINICJA 2.3.

C–funkcją nad R nazywamy taką funkcję $f : R \longrightarrow M$, gdzie M jest R-modułem, która spełnia następujące warunki dla dowolnych a, b, r, r', $s \in R$:

(1) $f(rs) = r^3 f(s) + s f(r)$,

(2) $3sf(r) - 3rf(s) = (r - s)(\Delta^2 f)(r, s)$,

(3) $(\Delta^2 f)(ar^3, bs^3) - (\Delta^2 f)(ar, bs) = 3a^2 b f(r^2 s) + 3ab^2 f(rs^2)$,

(4) $(\Delta^2 f)(r + r', s) = (\Delta^2 f)(r, s) + (\Delta^2 f)(r', s) + rr' s f(2)$.

Zauważmy, że warunek (4) można zastąpić warunkiem

(4′) $(\Delta^3 f)(r, r', s) = rr' s f(2)$,

gdyż z warunku (1) wynika, że $f(0) = 0$ (por. poniższy lemat).

LEMAT 2.8.

Jeśli $f : R \longrightarrow M$ jest C–funkcją, to dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

(5) $(r^3 - r) f(s) = (s^3 - s) f(r)$,

(6) $6f(r) = (r^3 - r) f(2)$,

(7) $f(0) = f(1) = 0$,

(8) *jeżeli s jest elementem odwracalnym, to* $f(s^{-1}) = -s^{-4} f(s)$,

(9) $(\Delta^2 f)(tr, ts) = t^3 (\Delta^2 f)(r, s)$,

(10) $(t^3 - t)(\Delta^2 f)(r,s) = (3r^2 s + 3rs^2)f(t)$,

(11) $\Delta^4 f = 0$.

Dowód.

Relację (5) otrzymujemy odejmując stronami dwie symetryczne wersje (1). Relację (6) otrzymujemy z (5), przyjmując $s = 2$. Równości $f(0) = f(1) = 0$ otrzymujemy kładąc w (1) $r = s = 0$ lub 1. Niech s będzie odwracalne. Ponieważ dzięki (1) mamy $0 = f(1) = f(s \cdot s^{-1}) = s^3 f(s^{-1}) + s^{-1} f(s)$, więc $-s^{-1}f(s) = s^3 f(s^{-1})$. Stąd po pomnożeniu przez s^{-3} otrzymujemy $f(s^{-1}) = s^{-4} f(s)$. Relacja (9) wynika z definicji $\Delta^2 f$ oraz (1). Istotnie,

$$(\Delta^2 f)(tr, ts) = f(tr + ts) - f(tr) - f(ts) =$$
$$= t^3 f(r+s) + (s+t)f(t) - t^3 f(r) - rf(t) - t^3 f(s) - sf(t) =$$
$$= t^3(f(r+s) - f(r) - f(s)) = t^3(\Delta^2 f)(r,s).$$

Relację (10) otrzymujemy z definicji $\Delta^2 f$ oraz (5). Istotnie,

$$(t^3 - t)(\Delta^2 f)(r,s) = (t^3 - t)(f(r+s) - f(r) - f(s)) =$$
$$= ((r+s)^3 - (r+s))f(t) - (r^3 - r)f(t) - (s^3 - s)f(t) = (3r^2 s + 3rs^2)f(t).$$

Ponieważ $f(0) = 0$, więc z (4) otrzymujemy (11). Relacja (12) wynika z trójliniowości $\Delta^3 f$. □

Przykład 2.2.

Określamy $f : R \longrightarrow R$ wzorem $f(r) = r^3 - r$. Pokażemy, że f jest C–funkcją.

Zauważmy najpierw, że $f(0) = 0$, skąd

$$(\Delta^2 f)(r,s) = 3r^2 s + 3rs^2, \tag{2.6}$$

$$(\Delta^3 f)(r,s,t) = 6rst. \tag{2.7}$$

Istotnie,

$$(\Delta^2 f)(r,s) = f(r+s) - f(r) - f(s) =$$

$$= (r+s)^3 - (r+s) - (r^3 - r) - (s^3 - s) = 3r^2 s + 3rs^2,$$

$$(\Delta^3 f)(r,s,t) = (\Delta^2 f)(r+s,t) - (\Delta^2 f)(r,t) - (\Delta^2 f)(s,t) =$$

$$= 3(r+s)^2 t + 3(r+s)t^2 - (3r^2 t + 3rt^2) - (3s^2 t + 3st^2) = 6rst.$$

Pokażemy, że funkcja f spełnia relacje (1)-(4).

(1) $f(rs) - r^3 f(s) - sf(r) = (rs)^3 - rs - r^3(s^3 - s) - s(r^3 - r) = 0.$

(2) $3sf(r) - 3rf(s) - (r-s)(\Delta^2 f)(r,s) =$

$= 3s(r^3 - r) - 3r(s^3 - s) - (r-s)(3r^2 s + 3rs^2) = 0$.

(3) $(\Delta^2 f)(ar^3, bs^3) - (\Delta^2 f)(ar, bs) - 3a^2 b f(r^2 s) - 3ab^2 f(rs^2) =$

$= 3(ar^3)^2 bs^3 + 3ar^3(bs^3)^2 - (3(ar)^2 bs + 3ar(bs)^2) -$

$- 3a^2 b((r^2 s)^3 - r^2 s) - 3ab^2((rs^2)^3 - rs^2) =$

$= 3a^2 b(r^6 s^3 - r^2 s - r^6 s^3 + r^2 s) + 3ab^2(r^3 s^6 - rs^2 - r^3 s^6 + rs^2) = 0.$

(4) Wynika to bezpośrednio ze wzoru (2.7) i tego, że $f(2) = 6$.

Podobnie jak poprzednio wprowadźmy następującą definicję.

DEFINICJA 2.4.

Niech $C(R) = C^{(3)}(R)$ będzie R-modułem generowanym przez elementy $\{r\}$, $r \in R$, z relacjami:

(1) $\{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\}$,

(2) $3s\{r\} - 3r\{s\} = (r-s)[r,s]$,

(3) $[ar^3, bs^3] - [ar, bs] = 3a^2 b\{r^2 s\} + 3ab^2\{rs^2\}$,

(4) $[r+r', s] = [r,s] + [r',s] + rr's\{2\}$,

gdzie $[r,s] = \{r+s\} - \{r\} - \{s\} = (\Delta^2\{\})(r,s)$ oraz $a, b, r, r', s \in R$.

Jak poprzednio mamy kanoniczną C–funkcję $c : R \longrightarrow C(R)$ określoną wzorem $c(r) = \{r\}$. Moduł $C(R)$ jest obiektem uniwersalnym ze względu na C–funkcje, co oznacza, że dowolna C-funkcja może być jednoznacznie przedstawiona jako złożenie kanonicznej C-funkcji $c : R \longrightarrow C(R)$ oraz R-homomorfizmu określonego na $C(R)$. Dokładniej, mamy następujące

TWIERDZENIE 2.7.

Niech $f : R \longrightarrow M$, gdzie M jest R–modułem, będzie C–funkcją. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm R–modułów $\overline{f} : C(R) \longrightarrow M$, taki że diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"'] & C(R) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Jest on określony na generatorach wzorem $\overline{f}(\{r\}) = f(r)$.

Jeśli $i : R \longrightarrow R'$ jest homomorfizmem pierścieni, to jak poprzednio otrzymujemy indukowany homomorfizm modułów $C(i) : C(R) \longrightarrow C(R')$ nad i, który określony jest na generatorach wzorem $C(i)(\{r\}) = \{i(r)\}$. Podobnie pokazujemy, że C jest funktorem z kategorii pierścieni przemiennych z jedynką do kategorii par pierścień-moduł określonej w poprzednim paragrafie.

Podobnie jak poprzednio pokażemy, że C komutuje z lokalizacjami.

Niech S będzie zbiorem multiplikatywnym w R i niech $i : R \longrightarrow R_S$ oraz $i : M \longrightarrow M_S$ będą homomorfizmami kanonicznymi.

TWIERDZENIE 2.8.

Dla dowolnej C-funkcji $f : R \longrightarrow M$ istnieje jedyna C-funkcja $f_S : R_S \longrightarrow M_S$ spełniająca warunek $f_S(i(r)) = i(f(r))$ dla $r \in R$, tzn. uzupełniająca diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_S \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_S} \\ M & \xrightarrow{i} & M_S \end{array}$$

do diagramu przemiennego. Jest ona dana wzorem:

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s} \tag{2.8}$$

lub równoważnie

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^4}. \tag{2.9}$$

Przy tym

$$(\Delta^2 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^3}, \tag{2.10}$$

$$(\Delta^3 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{r'}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^3 f)(r, r', s)}{t^3}. \tag{2.11}$$

DOWÓD.

Równoważność wzorów (2.8) oraz (2.9) wynika stąd, że dla dowolnej C—funkcji f mamy

$\frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s} = \frac{(s^3-s)f(r)-(r^3-r)f(s)+sf(r)-rf(s)}{s^4} = \frac{sf(r)-rf(s)}{s^4}$

na podstawie (5) dla f.

Załóżmy, że istnieje uzupełnienie powyższego diagramu. Warunek przemienności oznacza, że $f_S\left(\frac{r}{1}\right) = \frac{f(r)}{1}$ dla $r \in R$. Niech $s \in S$. Jeżeli f_S jest C-funkcją, to

$\frac{f(r)}{1} = f_S\left(\frac{r}{1}\right) = f_S\left(\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{s}{1}\right)\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^3 f_S\left(\frac{s}{1}\right) + \left(\frac{s}{1}\right) f_S\left(\frac{r}{s}\right) =$

$= \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{1} + \left(\frac{s}{1}\right) f_S\left(\frac{r}{s}\right),$

skąd wynika wzór (2.8). To dowodzi jedyności f_S.

Żeby udowodnić, że f_S jest poprawnie określona, jak poprzednio, wystarczy sprawdzić, że z prawej strony wzoru (2.8) orzymujemy to samo, jeżeli zastąpimy r przez rt i s przez st dla dowolnego $t \in S$. Dzięki (2) obliczamy, że

$$\frac{f(rt)}{st} - \left(\frac{rt}{st}\right)^3 \frac{f(st)}{st} = \frac{r^3 f(t)+tf(r)}{st} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{s^3 f(t)+tf(s)}{st} = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s}.$$

Udowodnimy wzory (2.10) i (2.11), korzystając z tego, że $f_S(0) = 0$. Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 2.4 ze wzoru (2.9) otrzymujemy

$$(\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r}{t}, \tfrac{s}{t}\right) = f_S\left(\tfrac{r}{t} + \tfrac{s}{t}\right) - f_S\left(\tfrac{r}{t}\right) - f_S\left(\tfrac{s}{t}\right) =$$
$$= \frac{tf(r+s)-(r+s)f(t)}{t^4} - \frac{tf(r)-rf(t)}{t^4} - \frac{tf(s)-sf(t)}{t^4} =$$
$$= \frac{f(r+s)-f(r)-f(s)}{t^3} = \frac{(\Delta^2 f)(r,s)}{t^3}.$$

Wzór (2.11) wynika ze wzoru (2.10). Istotnie,

$$(\Delta^3 f_S)\left(\tfrac{r}{t}, \tfrac{r'}{t}, \tfrac{s}{t}\right) = (\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r}{t} + \tfrac{r'}{t}, \tfrac{s}{t}\right) - (\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r}{t}, \tfrac{s}{t}\right) - (\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r'}{t}, \tfrac{s}{t}\right) =$$
$$= \frac{(\Delta^2 f)(r+r',s)}{t^3} - \frac{(\Delta^2 f)(r,s)}{t^3} - \frac{(\Delta^2 f)(r',s)}{t^3} = \frac{(\Delta^3 f)(r,r',s)}{t^3}.$$

Pozostaje udowodnić, że f_S jest C–funkcją. Niech $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{s}$, $\frac{r}{t}$, $\frac{s}{t}$ będą dowolnymi elementami R_S. Wówczas

(1) $f_S\left(\frac{r}{t}\frac{s}{t}\right) - \left(\frac{r}{t}\right)^3 f_S\left(\frac{r}{t}\right) - \left(\frac{s}{t}\right) f_S\left(\frac{s}{t}\right) =$

$$= \frac{t^2 f(rs)-rsf(t^2)}{t^8} - \left(\frac{r}{t}\right)^3 \frac{tf(s)-sf(t)}{t^4} - \frac{r}{t}\frac{tf(r)-rf(t)}{t^4} =$$
$$= \frac{t^2(r^3 f(s)+sf(r))-rs(t^3 f(t)+tf(t))}{t^8} - \frac{r^3(t^2 f(s)-stf(t))}{t^8} - \frac{s(t^4 f(r)-rt^3 f(t))}{t^8} =$$
$$= \frac{st^2 f(r)-rstf(t)+r^3 stf(t)-st^4 f(r)}{t^8} =$$
$$= \frac{st(t-t^3)f(r)-(r-r^3)stf(t)}{t^8} = 0$$

dzięki (1) i (6) dla f.

(2) $3\frac{s}{t} f_S(\frac{r}{t}) - 3\frac{r}{t} f_S(\frac{s}{t}) = 3\frac{s(tf(r)-rf(t))}{t^5} - 3\frac{r(tf(s)-sf(t))}{t^5} =$

$$= \frac{3sf(r)-3rf(s)}{t^4} = \frac{(r-s)(\Delta^2 f)(r,s)}{t^4} = \left(\tfrac{r}{t} - \tfrac{s}{t}\right)(\Delta^2 f_S)\left(\tfrac{r}{t}, \tfrac{s}{t}\right)$$

dzięki (2) dla f i wzorowi (2.10)

(3) Korzystając ze wzoru (2.10) oraz (10) dla f otrzymujemy

$(\Delta^2 f_S)\left(\frac{a}{t}\left(\frac{r}{t}\right)^3, \frac{b}{t}\left(\frac{s}{t}\right)^3\right) - (\Delta^2 f_S)\left(\frac{a}{t}\frac{r}{t}, \frac{b}{t}\frac{s}{t}\right) =$

$$= \frac{(\Delta^2 f)(ar^3,bs^3)}{t^{12}} - \frac{(\Delta^2 f)(ar,bs)}{t^6} = \frac{(\Delta^2 f)(ar^3,bs^3)-(\Delta^2 f)(ar,bs)}{t^{12}} - \frac{(t^9-t^3)(\Delta^2 f)(ar,bs)}{t^{15}} =$$

$$= \frac{3a^2bt^3 f(r^2s)+3ab^2t^3 f(rs^2)}{t^{15}} - \frac{(3(ar)^2bs+3ar(bs^2))f(t^3)}{t^{15}} =$$

$$= 3\frac{a^2b}{t^3}\frac{t^3 f(r^2s)-r^2sf(t^3)}{t^{12}} + 3\frac{ab^2}{t^3}\frac{t^3 f(rs^2)-rs^2 f(t^3)}{t^{12}} =$$

$$= 3\frac{a^2b}{t^3} f_S(\tfrac{r^2s}{t^3}) + 3\frac{ab^2}{t^3} f_S(\tfrac{rs^2}{t^3}) == 3(\tfrac{a}{t})^2\tfrac{b}{t} f_S((\tfrac{r}{t})^2\tfrac{s}{t}) + 3\tfrac{a}{t}(\tfrac{b}{t})^2 f_S(\tfrac{r}{t}(\tfrac{s}{t})^2).$$

(4′) Zauważmy, że dzięki przemienności diagramu mamy $f_S(\frac{2}{1}) = \frac{f(2)}{1}$, więc ze wzoru (2.11) otrzymujemy, że

$$(\Delta^3 f_S)(\tfrac{r}{t},\tfrac{r'}{t},\tfrac{s}{t}) = \frac{(\Delta^3 f)(r,r',s)}{t^3} = \frac{rr'sf(2)}{t^3} = \frac{r}{t}\frac{r'}{t}\frac{s}{t}\frac{f(2)}{1}. \qquad \square$$

TWIERDZENIE 2.9.

Istnieje R_S-izomorfizm $C(R)_S \approx C(R_S)$, taki że $\frac{\{r\}}{s} \leftrightarrow \frac{1}{s}\{\frac{r}{1}\}$.

DOWÓD.

Przeprowadzimy analogiczne rozumowanie jak w poprzednim przypadku. Stosując Lemat 2.8 do kanonicznej C-funkcji $c : R \longrightarrow C(R)$, $c(r) = \{r\}$, otrzymujemy C–funkcję $c_S : R_S \longrightarrow C(R)_S$ nad R_S, $c_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3\frac{\{s\}}{s}$. Z Twierdzenia 2.7 mamy R_S-homomorfizm $g : C(R_S) \longrightarrow C(R)_S$, $g\left(\{\frac{r}{s}\}\right) = c_S(\frac{r}{s}) = \frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3\frac{\{s\}}{s}$. Z drugiej strony mamy homomorfizm $C(i) : C(R) \longrightarrow C(R_S)$ nad $i : R \longrightarrow R_S$ określony na generatorach wzorem $C(i)(\{r\}) = \{\frac{r}{1}\}$, który daje nam R_S-homomorfizm $h : C(R)_S \longrightarrow C(R_S)$, taki że $h\left(\frac{\{r\}}{s}\right) = \frac{1}{s}\{\frac{r}{1}\}$. Zauważmy, że $h = g^{-1}$. Istotnie,

$$g\left(h\left(\frac{\{r\}}{s}\right)\right) = \frac{1}{s}g\left(\{\tfrac{r}{1}\}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{\{r\}}{1} - \left(\frac{r}{1}\right)^3\frac{\{1\}}{1}\right) = \frac{\{r\}}{s}$$

dzięki (7). Z drugiej strony, dzięki (8) i (1) obliczamy, że

$$h\left(g\left(\{\tfrac{r}{s}\}\right)\right) = h\left(\frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3\frac{\{s\}}{s}\right) =$$

$$= \frac{1}{s}\{\tfrac{r}{1}\} - \frac{r^3}{s^4}\{\tfrac{s}{1}\} = \frac{1}{s}\{\tfrac{r}{1}\} + \left(\frac{r}{1}\right)^3\{\tfrac{1}{s}\} = \{\tfrac{r}{1}\tfrac{1}{s}\} = \{\tfrac{r}{s}\}.$$

Stąd h jest izomorfizmem. $\square$

2.3.2. Homomorfizm P. Przypomnijmy, że z Przykładu 2.2 mamy C–funkcję $f : R \longrightarrow R$ określoną wzorem $f(r) = r^3 - r$. Zatem na mocy Twierdzenia 2.7 istnieje R–homomorfizm $P = P(R) : C(R) \longrightarrow R$ uzupełniający diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"'] & C(R) \arrow[d, dashed, "P"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Jest on określony na generatorach wzorem $P(\{r\}) = r^3 - r$ i jego obrazem jest $I_3(R)$. Homomorfizmy $P(R)$ wyznaczają przekształcenie funktorów, tzn. dla dowolnego homomorfizmu pierścieni $i : R \longrightarrow R'$ następujący diagram

$$\begin{tikzcd} C(R) \arrow[r, "P(R)"] \arrow[d, "C(i)"] & R \arrow[d, "i"] \\ C(R') \arrow[r, "P(R')"] & R' \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Rzeczywiście,

$$P(R')\left(C(i)(\{r\})\right) = P(R')(\{i(r)\}) = (i(r))^3 - i(r) = i(r^3 - r) = i\left(P(R)\{r\}\right).$$

Pokażemy, że P jest monomorfizmem dla dowolnego pierścienia R.

LEMAT 2.9.

Dla dowolnego zbioru multiplikatywnego S pierścienia przemiennego R mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} C(R)_S \arrow[d, "f"', "\cong"] \arrow[dr, "P(R)_S"] & \\ C(R_S) \arrow[r, "P(R_S)"'] & R_S \end{tikzcd}$$

gdzie f jest izomorfizmem z Twierdzenia 2.9. Zatem $P(R)_S$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $P(R_S)$ jest monomorfizmem.

DOWÓD.

$$P(R_S)\left(f\left(\frac{\{r\}}{s}\right)\right) = P(R_S)\left(\frac{1}{s}\left\{\frac{r}{1}\right\}\right) =$$
$$= \frac{1}{s}\left(\left(\frac{r}{1}\right)^3 - \frac{r}{1}\right) = \frac{r^3-r}{s} = \frac{P(R)(\{r\})}{s} = P(R)_S\left(\frac{\{r\}}{s}\right).$$

□

Stosując relację (1) otrzymujemy następujący

LEMAT 2.10.

Dla dowolnego $r \in R$ zachodzą wzory:

(1) $\{r^2\} = (r^3 + r)\{r\}$,

(2) $\{r^2 s\} = rs\{r\} + r^3 s\{r\} + r^6\{s\}$,

(3) $\{r^3\} = (r^6 + r^4 + r^2)\{r\}$,

DOWÓD.

Zauważmy, że

(1) $\{r^2\} = \{r \cdot r\} = r^3\{r\} + r\{r\} = (r^3 + r)\{r\}$,

(2) $\{r^2 s\} = r^6\{s\} + s\{r^2\} = r^6\{s\} + s(r^3 + r)\{r\} = rs\{r\} + r^3 s\{r\} + r^6\{s\}$.

Własność (3) otrzymujemy z (2) przy $s = r$. □

Przypomnijmy, że z własności (4') mamy $(\Delta^3\{\})(r, s, t) = rst2$, a z Lematu 2.8 (11) wynika, że $\Delta^4\{\} = 0$. Stąd i na mocy wzoru (1.2) otrzymujemy

WNIOSEK 2.7.

Dla dowolnego skończonego układu elementów $r_i \in R$ zachodzi następujący wzór:

$$\left\{\sum_i r_i\right\} = \sum_i \{r_i\} + \sum_{i<j} [r_i, r_j] + \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k \{2\}.$$

Rozważmy jądro R-homomorfizmu $P : C(R) \longrightarrow R$, $P(\{r\}) = r^3 - r$.

LEMAT 2.11.

$I_3(R) Ker(P) = 0$.

DOWÓD.

Niech $x = \sum_i a_i\{r_i\} \in Ker(P)$, to jest $\sum_i a_i(r_i^3 - r_i) = 0$.

Wtedy dzięki (5) otrzymujemy, że

$(r^3 - r)x = \sum_i a_i(r^3 - r)\{r_i\} = \sum_i a_i(r_i^3 - r_i)\{r\} = 0\{r\} = 0$. □

LEMAT 2.12.

Niech $x = \sum_{i=1}^{k} a_i\{r_i\} \in Ker(P)$, gdzie jeden z r_i jest równy 2. Jeżeli wszystkie a_i należą do $I_3(R)^m$ dla pewnego $m \geq 0$ oraz jeżeli spełniony jest jeden z warunków:

(1) $r_1, \ldots, r_k \in I_3(R)$

lub

(2) $3 \in I_3(R)$,

to $x = \sum_{i=1}^{k} b_i\{r_i\}$, gdzie wszystkie b_i należą do $I_3(R)^{3m+1}$.

DOWÓD.

Z założenia $\sum_{i=1}^{k} a_i r_i^3 = \sum_{i=1}^{k} a_i r_i$, co będziemy zapisywali jako $\sum_i a_i r_i^3 = \sum_i a_i r_i$. Na mocy Wniosku 2.7, Lematu 2.10 oraz warunku (1) Definicji 2.4 otrzymujemy:

$$\left\{\sum_i a_i r_i\right\} = \sum_i \{a_i r_i\} + \sum_{i<j} [a_i r_i, a_j r_j] + \sum_{i<j<k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\} =$$
$$= \sum_i a_i\{r_i\} + \sum_i r_i^3\{a_i\} + \sum_{i<j} [a_i r_i, a_j r_j] + \sum_{i<j<k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\}$$

oraz

$$\left\{\sum_i a_i r_i^3\right\} = \sum_i \{a_i r_i^3\} + \sum_{i<j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i<j<k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} =$$
$$= \sum_i a_i^3\{r_i^3\} + \sum_i r_i^3\{a_i\} + \sum_{i<j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i<j<k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} =$$
$$= \sum_i a_i^3(r_i^6 + r_i^4 + r_i^2)\{r_i\} + \sum_i r_i^3\{a_i\} + \sum_{i<j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i<j<k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\}.$$

Ponieważ lewe strony powyższych równości są identyczne, więc na mocy warunku (3) Definicji 2.4 otrzymujemy

$$x = \sum_i a_i\{r_i\} = \sum_i a_i^3(r_i^2 + r_i^4 + r_i^6)\{r_i\} + \sum_{i<j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] - \sum_{i<j} [a_i r_i, a_j r_j] +$$
$$+ \sum_{i<j<k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} - \sum_{i<j<k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\} =$$

$$= \sum_i a_i^3(r_i^6 + r_i^4 + r_i^2)\{r_i\} + \sum_{i<j} 3a_i^2 a_j\{r_i^2 r_j\} + \sum_{i<j} 3a_i a_j^2\{r_i r_j^2\} +$$
$$+ \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k (r_i^3 r_j^3 r_k^3 - r_i r_j r_k)\{2\} =$$
$$= \sum_i a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)\{r_i\} + \sum_{i<j} 3a_i^2 a_j(r_i r_j\{r_i\} + r_i^3 r_j\{r_i\} + r_i^6\{r_j\}) +$$
$$+ \sum_{i<j} 3a_i a_j^2(r_i r_j\{r_j\} + r_i r_j^3\{r_j\} + r_j^6\{r_i\}) + \sum_{i<j<k} a_i a_j a_k((r_i r_j r_k)^3 - r_i r_j r_k)\{2\}.$$

Zauważmy, że $(r_i^2)^3 - r_i^2$, $r_i^3 - r_i$, $(r_i r_j r_k)^3 - r_i r_j r_k \in I_3(R)$.

Stąd $a_i a_j a_k((r_i r_j r_k)^3 - r_i r_j r_k) \in I_3(R)^{3m+1}$. Jeżeli $3 \in I_3(R)$, to oczywiście $3a_i^2 a_j$, $3a_i a_j^2$ oraz $a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)$ należą do $I_3(R)^{3m+1}$. W przeciwnym razie, jeżeli wszystkie r_i należą do $I_3(R)$, to $a_i^2 a_j r_i$, $a_i a_j^2 r_j$, i $a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)$ należą do $I_3(R)^{3m+1}$. Stąd wszystkie współczynniki w powyższych sumach należą do $I_3(R)^{3m+1}$. □

WNIOSEK 2.8.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i\{r_i\} \in Ker(P)$ *i niech* M *oznacza podmoduł modułu* $C(R)$ *generowany przez* $\{r_i\}, \ldots, \{r_k\}$ *i* $\{2\}$.

Niech spełniony będzie jeden z warunków:

(1) $r_1, \ldots, r_k \in I_3(R)$ *oraz* $2 \in I_3(R)$

lub

(2) $3 \in I_3(R)$.

Wtedy $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_3(R)^m M$.

DOWÓD.

Jak poprzednio teza wynika stąd, że $3m + 1 > m$ dla $m \geq 0$ i z tego, że podmoduły $I_3(R)^m M$ tworzą ciąg zstępujący. □

2.3.3. Zasadnicze Twierdzenie. Głównym wynikiem tego paragrafu jest następujące

TWIERDZENIE 2.10.

Niech $C(R) = C^{(3)}(R)$ będzie R-modułem generowanym przez elementy $\{r\}$, $r \in R$, z relacjami:

(1) $\{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\}$,

(2) $3s\{r\} - 3r\{s\} = (r-s)[r,s]$,

(3) $[ar^3, bs^3] - [ar, bs] = 3a^2b\{r^2s\} + 3ab^2\{rs^2\}$,

(4) $[r + r', s] = [r,s] + [r', s] + rr's\{2\}$

dla dowolnych $a, b, r, r', s \in R$, gdzie $[r,s] = \{r+s\} - \{r\} - \{s\} = (\Delta^2\{\})(r,s)$. Wtedy istnieje R-izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I_3(R)$, taki że $P(\{r\}) = r^3 - r$ dla $r \in R$.

DOWÓD.

Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek lokalny noetherowski.

Załóżmy, że R jest pierścieniem lokalnym i noetherowskim. Wtedy mamy dwa przypadki:

przypadek 1: $I_3(R) = R$. Wtedy dzięki Lematowi 2.11 mamy $Ker(P) = 0$.

przypadek 2: $I_3(R)$ jest ideałem maksymalnym, czyli ciało ilorazowe pierścienia R ma dwa lub trzy elementy (por. Wniosek 2.1).

przypadek 2a: Jeśli ciało ilorazowe ma trzy elementy, to $3 \in I_3(R)$. Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.8. W tym przypadku spełniony jest warunek (2), zatem spełniona jest teza. Ponieważ M jest modułem skończenie generowanym nad lokalnym pierścieniem noetherowskim R, więc przekrój we Wniosku 2.8 jest zerowy dzięki twierdzeniu Krulla o przekroju i w konsekwencji $x = 0$.

przypadek 2b: Załóżmy teraz, że ciało ilorazowe ma dwa elementy; są nimi $I_3(R)$ oraz $1 + I_3(R) = U(R)$, a ponadto $2 \in I_3(R)$. Dzięki relacji (2) Definicji 2.4 przy $s = 1$ otrzymujemy, że

$$3\{r\} - 3r\{1\} = (r-1)(\{r+1\} - \{r\} - \{1\}),$$

skąd $(r+2)\{r\} = (r-1)\{r+1\}$. W związku z tym jeśli $r \in U(R)$, to również $r+2 \in U(R)$, skąd $\{r\} = \frac{r-1}{r+2}\{r+1\}$, przy czym $r+1$ jest nieodwracalny. Niech $x = \sum_i a_i\{r_i\} \in Ker(P)$. Jeżeli jakieś r_i jest odwracalne, to $\{r_i\}$ przedstawiamy w postaci $\frac{r_i-1}{r_i+2}\{r_i+1\}$, co oznacza, iż możemy założyć, że wszystkie r_i w powyższej sumie są nieodwracalne, czyli należą do $I_3(R)$. Ponadto, jak zauważyliśmy powyżej $2 \in I_3(R)$. Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.8. W tym przypadku spełniony jest warunek (1), a więc jak poprzednio $x = 0$.

To dowodzi, że $Ker(P) = 0$, czyli P jest monomorfizmem.

Przypadek noetherowski.

Załóżmy, że pierścień R jest noetherowski; wtedy wszystkie jego lokalizacje są noetherowskie. Z poprzedniego przypadku i z Lematu 2.9 mamy, że P jest takim homomorfizmem, który po lokalizacji względem dowolnego ideału pierwszego jest monomorfizmem, co oznacza, że P jest monomorfizmem.

Przypadek ogólny.

Niech $x = \sum_i a_i[r_i] \in Ker(P)$. Określamy podpierścień S pierścienia R generowany przez wszystkie elementy a_i i r_i. Ponieważ S jest skończenie generowany, więc jest noetherowski, a zatem na mocy poprzedniego przypadku $P : C(S) \longrightarrow S$ jest monomorfizmem. Niech $i : S \longrightarrow R$ będzie włożeniem. Wtedy podobnie jak poprzednio $x = (C(i))(y)$, gdzie $y = \sum_i a_i[r_i] \in C(S)$. Ponieważ $P(y) = P(x) = 0$, więc $y = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. To kończy dowód. $\square$

Otrzymujemy więc następujący

WNIOSEK 2.9.

Relacje generujące pomiędzy generatorami $\{r\} = r^3 - r$ *ideału* $I_3(R)$ *są następujące:*

(1) $\{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\}$,

(2) $3s\{r\} - 3r\{s\} = (r - s)(\{r + s\} - \{r\} - \{s\})$

(3) $\{ar^3 + bs^3\} - \{ar^3\} - \{bs^3\} - \{ar + bs\} + \{ar\} + \{bs\} =$

$= 3a^2b\{r^2s\} + 3ab^2\{rs^2\}$,

(4) $\{r + s + t\} = \{r + s\} + \{s + t\} + \{r + t\} - \{r\} - \{s\} - \{t\} + rst\{2\}$

dla $a, b, r, s, t \in R$.

ROZDZIAŁ 3

3-równości dla klasy Hom^5

Głównym celem tego rozdziału jest znalezienie relacji tworzących pełny zestaw 3–równości dla klasy Hom^5. Jedna z wersji pełnego zestawu 3–równości dla klasy Hom^5 została znaleziona w pracy [**2**]. Podamy ją w pierwszej części rozdziału. Ponieważ metody zastosowane w pracy [**2**] nie pozwalają znaleźć 2-równości w drugiej części rozdziału przedstawimy inną metodę, która pozwala znaleźć pełny zestaw zarówno 3–równości, jak 2–równości.

3.1. Pełny zestaw 3–równości - pierwsza wersja

Zacytujmy główny wynik pracy [**2**].

TWIERDZENIE 3.1 ([**2**], Theorem 8).

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 :

$(A1), (A2), (A)$ *oraz*

(B) $B(r,s,t) := (rx, sy, tz) - r(x, sy, tz) - s(rx, y, tz) - t(rx, sy, z) +$
$+ rs(x, y, tz) + rt(x, sy, z) + st(x, sy, tz) - rst(x, y, z) = 0,$

(B1) $B_1(r,s) := (x, ry, sz) - r(x, y, sz) - s(x, ry, z) + rs(x, y, z) -$
$- (s - s^2)(C_3(r) + [r]) = 0,$

(B2) $B_2(r,s) := (rsx, y, z) - r(sx, y, z) - s^3(rx, y, z) + rs^3(x, y, z) -$
$- (s^2 - s^3)C_3(r) = 0,$

(S) $S(r) := (rx, y, z) + (x, ry, z) + (x, y, rz) - (r^3 + 2r)(x, y, z) +$
$+ (1 - r)[r] = 0,$

gdzie $r, s, t \in R$, x, y, z *są dowolnymi elementami z dzedziny odwzorowania,*

$$C_3(r) = 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z),$$

$$[r] = (rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z) -$$

$$- r^2((x, x, y, z) + (x, y, y, z) + (x, y, z, z)) - 3(r - r^2)(x, y, z),$$

a (x, y, z) *oraz* (x, y, z, t) *oznaczają wartość odpowiednio trzeciego i czwartego defektu rozważanego odwzorowania.*

3.2. Pełny zestaw 3–równości - druga wersja

Znajdziemy inny pełny zestaw 3–równości dla klasy Hom^5 używając alternatywnej metody, niezależnej od wyników pracy [2]. Przypomnijmy, że problem znalezienia poszukiwanych relacji sprowadza się do wyznaczenia generatorów jądra homomorfizmu $\overline{h}^{5,3} : \overline{\Delta}^{5,3}(R) \longrightarrow \Gamma^{5,3}(R)$, określonego wzorem

$$\overline{h}^{5,3}(rx, sy, tz) = r^3st((3,1,1)) + rs^3t((1,3,1)) + rst^3((1,1,3))+$$

$$+r^2s^2t((2,2,1)) + r^2st^2((2,1,2)) + rs^2t^2((1,2,2)), \tag{3.1}$$

gdzie $((i,j,k)) = x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$, a $(rx, sy, tz) = (\Delta^3\overline{\delta}^3)(rx, sy, tz)$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\sigma = ((3,1,1)) + ((1,3,1)) + ((1,1,3)) + ((2,2,1)) + ((2,1,2)) + ((1,2,2)),$$

$$\sigma_3 = ((3,1,1)) + ((1,3,1)) + ((1,1,3)),$$

$$\sigma_2 = ((2,2,1)) + ((2,1,2)) + ((1,2,2)).$$

Wówczas $\overline{h}^{5,3}(x, y, z) = \sigma = \sigma_2 + \sigma_3$.

Z pracy [4] znamy następujący opis modułu $\overline{\Gamma}^{5,3}(R) = Im(\overline{h}^{5,3})$:

TWIERDZENIE 3.2 ([4], Theorem 5.9).

$$\overline{\Gamma}^{5,3}(R) = R\sigma \oplus I_2(R)((1,2,2)) \oplus I_2(R)((2,1,2)) \oplus I_2(R)((2,2,1))\oplus$$

$$\oplus I_3(R)((1,3,1)) \oplus I_3(R)((3,1,1)).$$

Jak łatwo zauważyć, przedstawienie elementu $\overline{h}^{5,3}(rx, sy, tz)$ w tej sumie prostej jest następujące:

$$\overline{h}^{5,3}(rx, sy, tz) = rst^3\sigma + rt(s^2t - st^2)((1,2,2)) + st(r^2t - rt^2)((2,1,2))+$$

$$+(r^2s^2t - rst^3)((2,2,1)) + s(r^3t - rt^3)((3,1,1)) + r(s^3t - st^3)((1,3,1)), \quad (3.2)$$

gdzie, jak łatwo zauważyć, $r^2s^2t - rst^3 = rs(t+1)(t-t^2) - t(rs - (rs)^2) \in I_2(R)$. Znajdziemy elementy modułu $\overline{\Delta}^{5,3}(R) = R\{(rx, sy, tz),\ r,s,t \in R\} \subset \overline{\Delta}^5(R^3)$, których obrazami poprzez $\overline{h}^{5,3}$ są składniki powyższej sumy.

Rozważmy następujące elementy modułu $\overline{\Delta}^{5,3}(R)$:

$C_3(r) = 3(rx,y,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z),$

$[r] = (rx,x,y,z) + (x,ry,y,z) + (x,y,rz,z) - r^2((x,x,y,z) + (x,y,y,z) +$

$+ (x,y,z,z)) - 3(r-r^2)(x,y,z)$

dla $r,s,t \in R$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$U_1(r) = C_3(r) + [r] = 3(rx,y,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z) + [r]$

oraz symetrycznie

$U_2(r) = 3(x,ry,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(x,ry,y,z) + [r],$

$U_3(r) = 3(x,y,rz) - 3r(x,y,z) + (1-r)(x,y,rz,z) + [r],$

a także

$V_1(r) = 2(rx,y,z) - 2r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z)$

oraz symetrycznie

$$V_2(r) = 2(x, ry, z) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(x, ry, y, z),$$

$$V_3(r) = 2(x, y, rz) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(x, y, rz, z).$$

LEMAT 3.1.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\overline{h}^{5,3}(rx, x, y, z) = (3r^2 + 3r)((3,1,1)) + 2r(((2,1,2)) + ((2,2,1))),$$

$$\overline{h}^{5,3}(x, ry, y, z) = (3r^2 + 3r)((1,3,1)) + 2r(((1,2,2)) + ((2,2,1))),$$

$$\overline{h}^{5,3}(x, y, rz, z) = (3r^2 + 3r)((1,1,3)) + 2r(((1,2,2)) + ((2,1,2))),$$

skąd

$$\overline{h}^{5,3}((rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z)) = (3r^2 + 3r)\sigma_3 + 4r\sigma_2.$$

DOWÓD.

Wystarczy udowodnić pierwszą równość.

Ponieważ $(rx, x, y, z) = ((r+1)x, y, z) - (rx, y, z) - (x, y, z)$, więc

$$\overline{h}^{5,3}((rx, x, y, z)) = (r+1)^3((3,1,1)) + (r+1)((1,3,1)) + (r+1)((1,1,3)) +$$

$$+ (r+1)^2((2,2,1)) + (r+1)^2((2,1,2)) + (r+1)((1,2,2)) -$$

$$-(r^3((3,1,1)) + r((1,3,1)) + r((1,1,3)) + r^2((2,2,1)) + r^2((2,1,2)) + r((1,2,2))) -$$

$$- (((3,1,1)) + ((1,3,1)) + ((1,1,3)) + ((2,2,1)) + ((2,1,2)) + ((1,2,2))) =$$

$$= (3r^2 + 3r)((3,1,1)) + 2r(((2,1,2)) + ((2,2,1))). \qquad \square$$

LEMAT 3.2.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\overline{h}^{5,3}([r]) = (r - r^2)(((1,2,2)) + ((2,1,2)) + ((2,2,1))).$$

DOWÓD.

Na mocy Lematu 3.1 otrzymujemy, że

$$\overline{h}^{5,3}([r]) = (3r^2 + 3r)\sigma_3 + 4r\sigma_2 - r^2(6\sigma_3 + 4\sigma_2) - 3(r - r^2)(\sigma_2 + \sigma_3) =$$

$$= (r - r^2)\sigma_2 = (r - r^2)(((1,2,2)) + ((2,1,2)) + ((2,2,1))). \qquad \square$$

LEMAT 3.3.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\overline{h}^{5,3}(C_3(r)) = (r^2 - r)(((2,1,2)) + ((2,2,1))).$$

DOWÓD.

Na mocy Lematu 3.1 otrzymujemy, że

$$\overline{h}^{5,3}(C_3(r)) = 3(r^3((3,1,1)) + r((1,3,1)) + r((1,1,3)) +$$

$$+ r^2((2,2,1)) + r^2((2,1,2)) + r((1,2,2))) - 3r\sigma +$$

$$+ (1 - r)((3r^2 + 3r)((3,1,1)) + 2r(((2,1,2)) + ((2,2,1)))) =$$

$$= 3r^3((3,1,1)) + 3r((1,3,1)) + 3r((1,1,3)) +$$

$$+ 3r^2((2,2,1)) + 3r^2((2,1,2)) + 3r((1,2,2)) - 3r\sigma +$$

$$+ (3r - 3r^3)((3,1,1)) + (2r - 2r^2)(((2,1,2)) + ((2,2,1))) =$$

$$= (r^2 - r)(((2,1,2)) + ((2,2,1))). \qquad \square$$

WNIOSEK 3.1.

Dla każdego $r \in R$ zachodzą następujące równości:

$$\overline{h}^{5,3}(U_1(r)) = (r - r^2)((1,2,2)),$$

$$\overline{h}^{5,3}(U_2(r)) = (r - r^2)((2,1,2)),$$

$$\overline{h}^{5,3}(U_3(r)) = (r - r^2)((2,2,1)).$$

LEMAT 3.4.

Dla każdego $r \in R$ zachodzą następujące równości:

$\overline{h}^{5,3}(V_1(r)) = (r - r^3)((3,1,1)),$

$\overline{h}^{5,3}(V_2(r)) = (r - r^3)((1,3,1)),$

$\overline{h}^{5,3}(V_3(r)) = (r - r^3)((1,1,3)).$

DOWÓD.

Na mocy Lematu 3.1 mamy

$$\begin{aligned}
\overline{h}^{5,3}(V_1(r)) &= 2(r^3((3,1,1)) + r((1,3,1)) + r((1,1,3)) + \\
&+ r^2((2,2,1)) + r^2((2,1,2)) + r((1,2,2))) \\
&- 2r(((3,1,1)) + ((1,3,1)) + ((1,1,3)) + ((2,2,1)) + ((2,1,2)) + ((1,2,2))) + \\
&+ (1-r)((3r^2+3r)((3,1,1)) + 2r(((2,1,2)) + ((2,2,1)))) = \\
&= (2r^3 - 2r + 3r^2 + 3r - 3r^3 - 3r^2)((3,1,1)) + \\
&+ (2r^2 - 2r + 2r - 2r^2)(((2,1,2)) + ((2,2,1))) = (r - r^3)((3,1,1)).
\end{aligned}$$

Dzięki symetrii otrzymujemy pozostałe wersje. □

Niech

$$\begin{aligned}
D(r,s,t) &= (rx, sy, tz) - rst^3(x,y,z) - rt(sU_1(t) - tU_1(s)) - st(rU_2(t) - tU_2(r)) - \\
&- (rs(t+1)U_3(t) - tU_3(rs)) - s(rV_1(t) - tV_1(r)) - r(sV_2(t) - tV_2(s)).
\end{aligned}$$

WNIOSEK 3.2.

$\overline{h}^{5,3}(D(r,s,t)) = 0.$

DOWÓD.

Zauważmy, że

$$\overline{h}^{5,3}(sU_1(t) - tU_1(s)) = s(t-t^2)((1,2,2)) - t(s-s^2)((1,2,2)) = (s^2t - st^2)((1,2,2)),$$

$$\overline{h}^{5,3}(rU_2(t) - tU_2(r)) = r(t-t^2)((2,1,2)) - t(r-r^2)((2,1,2)) = (r^2t - rt^2)((2,1,2)),$$

$$\overline{h}^{5,3}(rs(t+1)U_3(t) - tU_3(rs)) = rs(t+1)(t-t^2)((2,2,1)) - t(rs-(rs)^2)((2,2,1)) =$$

$= (r^2s^2t - rst^3)((2,2,1))$,

$\overline{h}^{5,3}(rV_1(t) - tV_1(r)) = r(t-t^3)((3,1,1)) - t(r-r^3)((3,1,1)) = (r^3t - rt^3)((3,1,1))$,

$\overline{h}^{5,3}(sV_2(t) - tV_2(s)) = s(t-t^3)((1,3,1)) - t(s-s^3)((1,3,1)) = (s^3t - st^3)((1,3,1))$.

Porównując ze wzorem (3.2) otrzymujemy tezę. □

Przedstawiając dowolny generator (rx, sy, tz) przy pomocy $D(r,s,t)$ oraz elementów typu $U_1(r)$, $U_2(r)$, $U_3(r)$, $V_1(r)$, $V_2(r)$, otrzymujemy następujący rozkład:

WNIOSEK 3.3.

$$\overline{\Delta}^{5,3}(R) = D(R) + R(x,y,z) +$$
$$+ U_1(R) + U_2(R) + U_3(R) + V_1(R) + V_2(R),$$

gdzie $D(R) = R\{D(r,s,t);\ r,s,t \in R\}$, $U_i(R) = R\{U_i(r);\ r \in R\}$ *dla* $i = 1,2,3$ *oraz* $V_i(R) = R\{V_i(r);\ r \in R\}$ *dla* $i = 1,2$.

TWIERDZENIE 3.3.

Ker $\left(\overline{h}^{5,3}\right) = K$, *gdzie* K *jest podmodułem generowanym przez następujące elementy:*

(1) $D(r,s,t)$,

(2) $U_i(r+s) - U_i(r) - U_i(s) - rsU_i(2),\ i = 1,2,3$,

(3) $U_i(rs) - r^2U_i(s) - sU_i(r),\ i = 1,2,3$,

(4) $V_i(rs) - r^3V_i(s) - sV_i(r),\ i = 1,2$,

(5) $3sV_i(r) - 3rV_i(s) - (r-s)(V_i(r+s) - V_i(r) - V_i(s)),\ i = 1,2$,

(6) $V_i(ar^3 + bs^3) - V_i(ar^3) - V_i(bs^3) - V_i(ar+bs) + V_i(ar) + V_i(bs) -$
$- 3a^2bV_i(r^2s) - 3ab^2V_i(rs^2),\ i = 1,2$,

(7) $V_i(r+s+t) - V_i(r+s) - V_i(s+t) - V_i(r+t) +$
$+ V_i(r) + V_i(s) + V_i(t) - rstV_i(2),\ i = 1,2$,

gdzie $r, s, t \in R$.

DOWÓD.

Zauważmy, że $K \subset Ker(\overline{h}^{5,3})$. Istotnie, dzięki Wnioskowi 3.2 wiemy, że $D(r,s,t) \in Ker\left(\overline{h}^{5,3}\right)$. Dzięki Przykładowi 2.1 wiemy, że wartości $\overline{h}^{5,3}$ na elementach (2)-(3) są zerowe, natomiast dzięki Przykładowi 2.2 wiemy, że wartości $\overline{h}^{5,3}$ na elementach (4)-(7) są zerowe. Zatem $\overline{h}^{5,3}$ indukuje homomorfizm $h' : \overline{\Delta}^{5,3}(R)/K \longrightarrow \overline{\Gamma}^{5,3}(R) \subset \Gamma^{5,3}(R)$. Oznaczmy przez $\overline{U_i(R)}$ (odpowiednio $\overline{V_i(R)}$) obraz $U_i(R)$ (odpowiednio $\overline{V_i(R)}$) przez homomorfizm naturalny. Wówczas $h'(\overline{U_1(R)}) = I_2(R)((1,2,2))$ i analogicznie $h'(\overline{U_2(R)}) = I_2(R)((2,1,2))$, $h'(\overline{U_3(R)}) = I_2(R)((2,2,1))$, $h'(\overline{V_1(R)}) = I_3(R)((3,1,1))$, $h'(\overline{V_2(R)}) = I_3(R)((1,3,1))$. Pokażemy, że ograniczenia h' do tych podmodułów są monomorfizmami. Dla przykładu pokażemy, że $h'|_{\overline{U_1(R)}}$ jest monomorfizmem. Ponieważ $((1,2,2))$ jest elementem bazy modułu $\Gamma^{5,3}(R)$, więc możemy rozważyć złożenie $h'' : \overline{U_1(R)} \longrightarrow I_2(R)$ homorfizmu $h'|_{U_1(R)}$ z izomorfizmem $I_2(R)((1,2,2)) \approx I_2(R)$, przeciwnym do rzutowania na $I_2(R)$, określone na generatorach wzorem $h''(\overline{U_1(r)}) = r^2 - r$. Rozważmy odwzorowanie $\overline{U_1} : R \longrightarrow \overline{U_1(R)}$ określone wzorem $\overline{U_1}(r) = \overline{U_1(r)}$. Ponieważ elementy $\overline{U_1(r)}$ spełniają odpowiednie relacje dzięki (2)-(3), więc $\overline{U_1}$ jest $C-$funkcją. Z własności uniwersalności (Twierdzenie 2.3) istnieje więc homomorfizm $i : C(R) \longrightarrow \overline{U_1(R)}$ określony wzorem $i(c(r)) = \overline{U_1(r)}$. Ale dzięki Twierdzeniu 2.2 istnieje izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I_2(R)$ określony wzorem $P([r]) = r^2 - r$, a więc taki, że $P = h'' \circ i$. Ponieważ P jest izomorfizmem oraz i jest epimorfizmem, więc h'' jest monomorfizmem, a w konsekwencji $h'|_{\overline{U_1(R)}}$ jest monomorfizmem. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe ograniczenia są monomorfizmami, korzystając z relacji pochodzących z pozostałych generatorów modułu K ((2)-(7)).

Niech teraz $x \in Ker\left(\overline{h}^{5,3}\right)$, a więc $\overline{x} \in Ker(h')$. Korzystając z przdstawienia we Wniosku 3.3 i tego, że $D(R) \subset K$, mamy $\overline{x} = \overline{r(x,y,z)} + \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3} + \overline{v_1} + \overline{v_2}$, gdzie $r \in R, u_i \in U_i(R), i = 1,2,3$ oraz $v_i \in V_i(R), i = 1,2$. Stąd

$$0 = h'(\overline{x}) = r\sigma + h'(\overline{u_1}) + h'(\overline{u_2}) + h'(\overline{u_3}) + h'(\overline{v_1}) + h'(\overline{v_2}).$$

Ponieważ każdy składnk sumy po prawej stronie należy do innego składnika prostego modułu $\overline{\Gamma}^{5,3}$, więc $h'(\overline{u_1}) = h'(\overline{u_2}) = h'(\overline{u_3}) = h'(\overline{v_1}) = h'(\overline{v_2}) = 0$. Mamy także $r\sigma = 0$, a w konsekwencji $r = 0$. Korzystając z tego, że odpowiednie ograniczenia homomorfizmu h' są monomorfizmami otrzymujemy, że $\overline{u_1} = \overline{u_2} = \overline{u_3} = \overline{v_1} = \overline{v_2} = 0$, a zatem $\overline{x} = 0$, skąd $x \in K$. □

Pomijając symetryczne wersje otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 3.4.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 : $(A1)$, $(A2)$, (A) *oraz*

(1) $D(r,s,t) = 0,$

(2) $U(r+s) = U(r) + U(s) + rsU(2),$

(3) $U(rs) = r^2U(s) + sU(r),$

(4) $V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$

(5) $3sV(r) - 3rV(s) = (r-s)(V(r+s) - V(r) - V(s)),$

(6) $V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar+bs) + V(ar) + V(bs) =$
$= 3a^2bV(r^2s) - 3ab^2V(rs^2),$

(7) $V(r+s+t) - V(r+s) - V(s+t) - V(r+t) + V(r) + V(s) + V(t) - rstV(2) = 0,$

gdzie $r,s,t \in R$, x,y,z są dowolnymi elementami z dzedziny odwzorowania,

$$U(r) = 3(rx,y,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z) +$$
$$+ (rx,x,y,z) + (x,ry,y,z) + (x,y,rz,z) - r^2((x,x,y,z) + (x,y,y,z) +$$
$$+ (x,y,z,z)) - 3(r-r^2)(x,y,z),$$
$$V(r) = 2(rx,y,z) - 2r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z),$$

$$D(r,s,t) = (rx, sy, tz) - rst^3(x,y,z) - rt(sU_1(t) - tU_1(s)) - st(rU_2(t) - tU_2(r)) -$$
$$- (rs(t+1)U_3(t) - tU_3(rs)) - s(rV_1(t) - tV_1(r)) - r(sV_2(t) - tV_2(s)),$$

przy czym $U_1(R) = U(R)$, $V_1(R) = V(R)$, a $U_2(R)$, $U_3(R)$ (odpowiednio $V_2(R)$) są symetrycznymi wersjami $U(R)$ (odpowiednio $V(R)$), a (x,y,z) oraz (x,y,z,t) oznaczają wartość odpowiednio trzeciego i czwartego defektu rozważanego odwzorowania.

3.3. Modyfikacja drugiej wersji

Pokażemy teraz, że w Twierdzeniu 3.4 relację (2) można opuścić, a (3) zmodyfikować. Zastosujemy tu pewne fakty pochodzące z [**2**]. Niech $P : \overline{\Delta}^{5,3}(R) \longrightarrow R$ będzie różnicą złożeń homomorfizmu $\overline{h}^{5,3}$ z odwzorowaniami współrzędnych przy elementach bazy ((3,1,1) i ((1,2,2)). Jest to więc homomorfizm określony wzorem $P(rx, sy, tz) = r^3st - rs^2t^2$. Nietrudno sprawdzić (zob. [**2**], Lemma 1, Corollary 1), że wiemy, że $P([r]) = r^2 - r$ dla każdego $r \in R$.

TWIERDZENIE 3.5 ([**2**], Theorem 2).

Ograniczenie homomorfizmu $P : \overline{\Delta}^{5,3}(R) \longrightarrow R$ do podmodułu $[R] = R\{[r]; r \in R\}$ modułu $\overline{\Delta}^{5,3}(R)$ ustala izomorfizm $[R]$ z ideałem $I(R) = (r^2 - r; r \in R)$.

DOWÓD.

Oczywiście ograniczenie P do $[R]$ jest epimorfizmem. Pozostaje więc udowodnić, że jest monomorfizmem. Załóżmy, że $\sum_i a_i[r_i] \in Ker(P)$ dla pewnych $a_i, r_i \in R$, a zatem $\sum_i a_i(r_i^2 - r_i) = 0$. Wobec tego $\sum_i a_i r_i^2 = \sum_i a_i r_i = s$. Rozważmy element

$$u = \textstyle\sum_i a_i(r_i x_1, x_2, x_3, x_4) \in \overline{\Delta}^{5,4}(R),$$

gdzie $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ jest bazą standardową R^4. Ponieważ $\overline{h}^{5,4}$ jest monomorfizmem (por. Rozdział 1) oraz

$$\overline{h}^{5,4}(u) = \textstyle\sum_i a_i(r_i^2 x_1^{(2)} x_2 x_3 x_4 + r_i x_1 x_2^{(2)} x_3 x_4 + r_i x_1 x_2 x_3^{(2)} x_4 + r_i x_1 x_2 x_3 x_4^{(2)}) =$$

$= s(x_1^{(2)}x_2x_3x_4 + x_1x_2^{(2)}x_3x_4 + x_1x_2x_3^{(2)}x_4 + x_1x_2x_3x_4^{(2)}) = \overline{h}^{5,4}(s(x_1,x_2,x_3,x_4))$,

więc $u = s(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Przejdźmy teraz do modułu $\overline{\Delta}^{5,3}(R)$ przez podstawienie $x_1, x_4 \mapsto x$, $x_2 \mapsto y$, $x_3 \mapsto z$. Dokładniej mówiąc, zastosujmy homomorfizm $\overline{\Delta}^5(f) : \overline{\Delta}^5(R^4) \longrightarrow \overline{\Delta}^5(R^3)$, gdzie $f : R^4 \longrightarrow R^3$ jest homomorfizmem określonym na bazie jak powyżej. Z równości

$$\sum_i a_i(r_ix_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

otrzymujemy

$$\sum_i a_i(r_ix, x, y, z) = s(x,x,y,z).$$

Dzięki symetrii otrzymujemy również

$$\sum_i a_i(x, r_iy, y, z) = s(x,y,y,z),$$

$$\sum_i a_i(x, y, r_iz, z) = s(x,y,z,z).$$

Stąd

$$\begin{aligned}\sum_i a_i[r_i] &= \sum_i a_i(r_ix,x,y,z) + \sum_i a_i(r_ix,y,y,z) + \sum_i a_i(x,y,r_iz,z) - \\ &- \sum_i a_ir_i^2(x,x,y,z) - \sum_i a_ir_i^2(x,y,y,z) - \sum_i a_ir_i^2(x,y,z,z) - \\ &- 3\sum_i a_i(r_i - r_i^2)(x,y,z) = \\ &= s(x,x,y,z) + s(x,y,y,z) + s(x,y,z,z) - \\ &- s(x,x,y,z) - s(x,y,y,z) - s(x,y,z,z) = 0.\end{aligned}$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika, że elementy typu $[r]$ spełniają założenia Twierdzenia 2.2, otrzymujemy więc

WNIOSEK 3.4 ([**2**], Corollary 2).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

(1) $[r+s] = [r] + [s] + rs[2]$,

(2) $[rs] = r[s] + s^2[r]$,

(3) $(r^2 - r)[s] = (s^2 - s)[r]$,

(4) $2[r] = (r^2 - r)[2]$, $[2r] = (2r^2 - r)[2]$,

(5) $[r] = [1 - r]$, $[0] = [1] = 0$, $[2] = [-1]$,

(6) *jeżeli* $r^2 - r = 2s$, *to* $[r] = s[2]$,

(7) *jeżeli* s *jest odwracalne, to* $[s^{-1}] = -s^{-3}[s]$.

Dzięki uniwersalności powyższe równości zachodzą również dla dowolnego regularnego 5–odwzorowania f. W dalszym ciągu również zakładamy, że f jest dowolnym regularnym 5–odwzorowaniem, $() = \Delta^3 f$ oraz x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny f.

LEMAT 3.5 ([**2**], Lemma 6).

Dla dowolnych $r, s \in R$ *mamy*

(1) $2(rx, sx, y, z) = 2rs(x, x, y, z) + (rs^2 + r^2 s - 2rs)(x, x, x, y, z)$,

(2) $C_3(2) = (x, x, y, z) - (x, x, x, y, z)$,

(3) $(-rx, y, z) + (rx, y, z) = r^2 C_3(2)$,

(4) $B_2(r, -1) = (r^2 - r)C_3(2) - 2C_3(r)$.

DOWÓD.

(1) Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 1.1 (5), przy $r = 2$, mamy

$$2(sx, x, y, z) = (s^2 - s)(2x, x, y, z) + (4s - 2s^2)(x, x, y, z).$$

Stąd i dzięki regularności (własność (A)) otrzymujemy

$$2(rx, sx, y, z) = 2(r(x, sx, y, z) + s(rx, x, y, z) - rs(x, x, y, z)) =$$

$$= r((s^2 - s)(2x, x, y, z) + (4s - 2s^2)(x, x, y, z)) +$$

$$+ s((r^2 - r)(2x, x, y, z) + (4r - 2r^2)(x, x, y, z)) - 2rs(x, x, y, z) =$$

$$= (rs^2 + r^2 s - 2rs)(2x, x, y, z) + (6rs - 2rs^2 - 2r^2 s)(x, x, y, z) =$$

$$= (rs^2 + r^2 s - 2rs)(x, x, x, y, z) + (2rs^2 + 2r^2 s - 4rs)(x, x, y, z) +$$

$$+ (6rs - 2rs^2 - 2r^2 s)(x, x, y, z) = (rs^2 + r^2 s - 2rs)(x, x, x, y, z) + 2rs(x, x, y, z).$$

(2) $C_3(2) = 3(2x, y, z) - 3 \cdot 2(x, y, z) - (2x, x, y, z) =$

$= 3(x, x, y, z) - (2(x, x, y, z) + (x, x, x, y, z)) = (x, x, y, z) - (x, x, x, y, z).$

(3) Dzięki (A), (A2), (1) oraz (2) obliczamy, że

$$(-rx, y, z) + (rx, y, z) = -(-rx, rx, y, z) = (rx, rx, y, z) + (-rx, rx, rx, y, z) =$$

$$= 2r(rx, x, y, z) - r^2(x, x, y, z) - r^3(x, x, x, y, z) =$$

$$= 2r^2(x, x, y, z) + (r^3 - r^2)(x, x, x, y, z) - r^2(x, x, y, z) - r^3(x, x, x, y, z) =$$

$$= r^2((x, x, y, z) - (x, x, x, y, z)) = r^2 C_3(2).$$

(4) Dzięki (3) otrzymujemy, że

$$(-rx, y, z) - r(-x, y, z) + (rx, y, z) - r(x, y, z) = (r^2 - r)C_3(2).$$

Zatem

$$B_2(r, -1) = (-rx, y, z) - r(-x, y, z) + (rx, y, z) - r(x, y, z) - 2C_3(r) =$$

$$= (r^2 - r)C_3(2) - 2C_3(r).$$

□

TWIERDZENIE 3.6 ([**2**], Proposition 1).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

(1) $C_3(r + s) = C_3(r) + C_3(s) + rsC_3(2),$

(2) $C_3(rs) - rC_3(s) - s^2C_3(r) = 3B_2(r, s) - (s^2 - s^3)B_2(r, -1),$

gdzie $B_2(r, s)$ zostało zdefiniowane w Twierdzeniu 3.1.

DOWÓD.

(1) Zauważmy, że

$$C_3(r + s) - C_3(r) - C_3(s) =$$

$$= 3((r + s)x, y, z) - 3(r + s)(x, y, z) + (1 - (r + s))((r + s)x, x, y, z) -$$

$$- 3(rx, y, z) + 3r(x, y, z) - (1 - r)(rx, x, y, z) -$$

$$- 3(sx, y, z) + 3s(x, y, z) - (1 - s)(sx, x, y, z) =$$

$$= 3(rx, sx, y, z) + (1 - (r + s))((rx, x, y, z) + (sx, x, y, z) + (rx, sx, x, y, z)) -$$

$$- (1-r)(rx,x,y,z) - (1-s)(sx,x,y,z) =$$

$$= 3(rx,sx,y,z) - r(sx,x,y,z) - s(rx,x,y,z) + (1-r-s)(rx,sx,x,y,z).$$

Na mocy (A2), Lematu 3.5 i (A) ostatnie wyrażenie jest równe

$$2(rx,sx,y,z) + ((rx,sx,y,z) - r(sx,x,y,z) - s(rx,x,y,z)) +$$

$$+ (rs - r^2s - rs^2)(x,x,x,y,z) =$$

$$= 2rs(x,x,y,z) + (rs^2 + r^2s - 2rs)(x,x,x,y,z) - rs(x,x,y,z) +$$

$$+ (rs - r^2s - rs^2)(x,x,x,y,z) =$$

$$= rs(x,x,y,z) - rs(x,x,x,y,z) = rsC_3(2).$$

(2) Zauważmy, że

$$C_3(rs) - rC_3(s) - s^3C_3(r) - 3(B_2(r,s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) =$$

$$= 3(rsx,y,z) - 3rs(x,y,z) + (1-rs)(rsx,x,y,z) -$$

$$- r(3(sx,y,z) - 3s(x,y,z) + (1-s)(sx,x,y,z)) +$$

$$- s^3(3(rx,y,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z)) -$$

$$- 3((rsx,y,z) - r(sx,y,z) - s^3(rx,y,z) + rs^3(x,y,z)) =$$

$$= (1-rs)(rsx,x,y,z) - r(1-s)(sx,x,y,z) - (1-r)s^3(rx,x,y,z).$$

Dzięki regularności (Twierdzenie 1.1) (3) i (5), ostatnie wyrażenie jest równe

$$(1-rs)(r(sx,x,y,z) + s^2(rx,xy,z) - rs^2(x,x,y,z)) +$$

$$+ (rs - r)(sx,x,y,z) + (rs^3 - s^3)(rx,x,y,z) =$$

$$= s(r - r^2)(sx,x,y,z) + (s^2 - s^3)(rx,x,y,z) - (1-rs)rs^2(x,x,y,z) =$$

$$= s((s - s^2)(rx,x,y,z) + (rs^2 - r^2s)(x,x,y,z)) + (s^2 - s^3)(rx,x,y,z) +$$

$$+ (r^2s^3 - rs^2)(x,x,y,z) =$$

$$= 2(s^2 - s^3)(rx,x,y,z) - (s^2 - s^3)(r + r^2)(x,x,y,z).$$

Stosując Lemat 3.5 (1) i (2) otrzymujemy, że ostatni element jest równy

$$(s^2 - s^3)(2r(x,x,y,z) + (r^2 - r)(x,x,x,y,z)) - (s^2 - s^3)(r + r^2)(x,x,y,z) =$$

$$= (s^2 - s^3)(r - r^2)((x,x,y,z) - (x,x,x,y,z)) = (s^2 - s^3)(r - r^2)C_3(2).$$

Ostatecznie, dzięki Lematowi 3.5 (4) otrzymujemy, że

$$
\begin{aligned}
&C_3(rs) - rC_3(s) - s^2C_3(r) = \\
&= 3(B_2(r,s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) - (s^2 - s^3)C_3(r) - (s^2 - s^3)(r^2 - r)C_3(2) = \\
&= 3((B_2(r,s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) - (s^2 - s^3)C_3(r)) - \\
&- (s^2 - s^3)(B_2(r,-1) + 2C_3(r) - 2C_3(r)) = \\
&= 3B_2(r,s) - (s^2 - s^3)B_2(r,-1).
\end{aligned}
$$

□

WNIOSEK 3.5.

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

(1) $U(r+s) - U(r) - U(s) - rsU(2) = 0,$

(2) $U(rs) - r^2U(s) - sU(r) = 3B_2(r,s) - (s^2 - s^3)B_2(r,-1),$

Oznacza to, że główny wynik możemy zapisać jako następujące

TWIERDZENIE 3.7.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 :

$(A1)$, $(A2)$, (A) *oraz*

(1) $D(r,s,t) = 0,$

(2) $3B_2(r,s) - (s^2 - s^3)B_2(r,-1) = 0,$

(3) $V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$

(4) $3sV(r) - 3rV(s) = (r - s)(V(r+s) - V(r) - V(s)),$

(5) $V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar + bs) + V(ar) + V(bs) =$

$= 3a^2bV(r^2s) + 3ab^2V(rs^2) = 0,$

(6) $V(r+s+t) - V(r+s) - V(s+t) - V(r+t) + V(r) + V(s) + V(t) - rstV(2) = 0,$

gdzie $r, s, t \in R$, x, y, z są dowolnymi elementami z dzedziny odwzorowania, przy czym $D(r,s,t)$ zostało zdefiniowane w Twierdzeniu 3.4,

$B_2(r,s) = (rsx, y, z) - r(sx, y, z) - s^3(rx, y, z) + rs^3(x, y, z) -$

$- (s^2 - s^3)(3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z)),$

$V(r) = 2(rx, y, z) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z).$

ROZDZIAŁ 4

2-równości dla klasy Hom^5

Głównym celem tego rozdziału jest znalezienie relacji tworzących pełny zestaw 2−równości dla klasy Hom^5. Użyjemy tych samych metod, co w poprzednim rozdziale. Tym razem problem znalezienia poszukiwanych relacji sprowadza się do wyznaczenia generatorów jądra homomorfizmu $\overline{h}^{5,2} : \overline{\Delta}^{5,2}(R) \longrightarrow \Gamma^{5,2}(R)$, określonego wzorem

$$\overline{h}^{5,2}(rx, sy) = r^4s((4,1)) + r^3s^2((3,2)) + r^2s^3((2,3)) + rs^4((1,4)), \tag{4.1}$$

gdzie $((i,j)) = x^{(i)}y^{(j)}$, a $(rx, sy) = (\Delta^2\overline{\delta}^3)(rx, sy)$.
Z pracy [4] znamy następujący opis modułu $\overline{\Gamma}^{5,2}(R) = Im(\overline{h}^{5,2})$:

TWIERDZENIE 4.1 ([4], Theorem 5.9).
$\overline{\Gamma}^{5,2}(R) = R\sigma \oplus I_3(R)((3,2)) \oplus I_3(R)((2,3)) \oplus I_4(R)(((4,1)) + ((2,3)))$.

Jak łatwo zauważyć przedstawienie elementu $\overline{h}^{5,2}(rx, sy,)$ w tej sumie prostej jest następujące:

$$\overline{h}^{5,2}(rx, sy) = rs^4\sigma + s(r^3s - rs^3)((3,2)) + r(rs^3 - r^3s)((2,3)) +$$

$$+ (r^4s - rs^4)(((2,3)) + ((4,1))), \tag{4.2}$$

gdzie σ oznacza sumę wszystkich elementów bazowych modułu $\Gamma^{5,2}(R)$, to znaczy
$\sigma = ((4,1)) + ((3,2)) + ((2,3)) + ((1,4))$.

Jak poprzednio potrzebujemy elementów, których obrazy są odpowiednimi wielokrotnościami elementów bazowych. Dokładniej, szukamy elementów, na których wartości $\overline{h}^{5,2}$ wynoszą: $(r^3-r)((3,2))$, $(r^3-r)((2,3))$ oraz $(r^4-r)(((2,3))+((4,1)))$. Przypomnijmy, że dla każdego $r \in R$ mamy następujące elementy $\overline{\Delta}^{5,3}(R)$:

$$[r] = (rx,x,y,z) + (x,ry,y,z) + (x,y,rz,z) - r^2((x,x,y,z) + (x,y,y,z) +$$
$$+ (x,y,z,z)) - 3(r-r^2)(x,y,z),$$
$$C_3(r) = 3(rx,y,z) - 3r(x,y,z) + (1-r)(rx,x,y,z),$$
$$U_1(r) = C_3(r) + [r].$$

Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\Delta}^{5,3}(R) \subset & \overline{\Delta}^{5}(Rx \oplus Ry \oplus Rz) & \xrightarrow{\overline{h}^5} & \Gamma^5(Rx \oplus Ry \oplus Rz) \\
& \Big\downarrow \overline{\Delta}^5(f) & & \Big\downarrow \Gamma^5(f) \\
\overline{\Delta}^{5,2}(R) \subset & \overline{\Delta}^{5}(Rx \oplus Ry) & \xrightarrow{\overline{h}^5} & \Gamma^5(Rx \oplus Ry)
\end{array}$$

gdzie homomorfizm $f : Rx \oplus Ry \oplus Rz \longrightarrow Rx \oplus Ry$ jest określony na elementach bazy w następujący sposób: $f(x) = x$, $f(y) = x$, $f(z) = y$. Powyższy diagram jest przemienny, gdyż $\overline{h}^5$ jest przekształceniem funktorów.

Oznaczmy $W_1'(r) = (\overline{\Delta}^5(f))(U_1(r))$ i zauważmy, że

$$W_1'(r) = 3(rx,x,y) - 3r(x,x,y) + (1-r)(rx,x,x,y) +$$
$$+ (rx,x,x,y) + (x,rx,x,y) + (x,x,ry,y) - r^2((x,x,x,y) + (x,x,x,y) +$$
$$+ (x,x,y,y)) - 3(r-r^2)(x,x,y) =$$
$$= 3(rx,x,y) + (3-r)(rx,x,x,y) + (x,x,ry,y) -$$
$$- r^2(2(x,x,x,y) + (x,x,y,y)) - 3(2r-r^2)(x,x,y) \in \overline{\Delta}^{5,2}(R).$$

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że $\overline{h}^{5,3}(U_1(r)) = (r-r^2)((1,2,2))$. Zatem

$$\overline{h}^{5,2}(W_1'(r)) = \overline{h}^5(W_1'(r)) = \overline{h}^5((\overline{\Delta}^5)(f))(U_1(r)) =$$
$$= \Gamma^5(f)\left((\overline{h}^5)(U_1(r))\right) = \Gamma^5(f)((r-r^2)((1,2,2))) =$$
$$= (r-r^2)\Gamma^5(f)(((1,2,2))) = (r-r^2)\Gamma^5(f)(xy^{(2)}z^{(2)}).$$

Zauważmy, że

$$\Gamma^5(f)(xy^{(2)}z^{(2)}) = xx^{(2)}y^{(2)} = (1,2)x^{(3)}y^{(2)} = 3((3,2)).$$

Stąd otrzymujemy, że $\overline{h}^{5,2}(W_1'(r)) = 3(r - r^2)((3,2))$.

Zamieniając rolami x i y otrzymujemy element

$$W_2'(r) = 3(x, ry, y) - 3r(x, y, y) + (1 - r)(x, ry, y, y) +$$

$$+ (rx, x, y, y) + (x, ry, y, y) + (x, y, ry, y) - r^2((x, x, y, y) + (x, y, y, y) +$$

$$+ (x, y, y, y)) - 3(r - r^2)(x, y, y) =$$

$$= 3(x, ry, y) + (3 - r)(x, ry, y, y) + (x, x, ry, y) -$$

$$- r^2((x, x, y, y) + 2(x, y, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, y, y),$$

taki że $\overline{h}^{5,2}(W_2'(r)) = 3(r - r^2)((2,3))$.

WNIOSEK 4.1.

Zachodzą następujące równości:

$$\overline{h}^{5,2}((r+1)W_1'(r)) = 3(r - r^3)((3,2)),$$

$$\overline{h}^{5,2}((r+1)W_2'(r)) = 3(r - r^3)((2,3)).$$

Korzystając ze wzoru (4.1) otrzymujemy

$$\overline{h}^{5,2}(rx, y) = r^4((4,1)) + r^3((3,2)) + r^2((2,3)) + r((1,4)),$$

$$\overline{h}^{5,2}(-rx, y) = r^4((4,1)) - r^3((3,2)) + r^2((2,3)) - r((1,4)).$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\overline{h}^{5,2}((rx, y) - (-rx, y)) = 2r^3((3,2)) + 2r((1,4)),$$

skąd w szczególności $\overline{h}^{5,2}((x, y) - (-x, y)) = 2((3,2)) + 2((1,4))$,

Oznaczmy $W_1''(r) = (rx, y) - (-rx, y) - r((x, y) - (-x, y))$.

Wówczas z powyższego wynika, że $\overline{h}^{5,2}(W_1''(r)) = 2(r^3 - r)((3,2))$.

Symetrycznie otrzymujemy element

$$W_2''(r) = (x, ry) + (-x, ry) - r((x, y) + (-x, y)),$$

taki że $\overline{h}^{5,2}(W_2''(r)) = 2(r^3 - r)((2,3))$.

Oznaczmy

$$W_1(r) = -(r+1)W_1'(r) - W_1''(r),$$

$$W_2(r) = -(r+1)W_2'(r) - W_2''(r).$$

Z Wniosku 4.1 i powyższych rachunków wynika

WNIOSEK 4.2.

Zachodzą następujące równości:

$$\overline{h}^{5,2}(W_1(r)) = (r^3 - r)((3,2)),$$

$$\overline{h}^{5,2}(W_2(r)) = (r^3 - r)((2,3)).$$

Na mocy wzoru (4.2) otrzymujemy

$$\overline{h}^{5,2}(rx,y) = r\sigma + (r^3 - r)((3,2)) - r(r^3 - r)((2,3)) + (r^4 - r)(((2,3)) + ((4,1))). \quad (4.3)$$

Oznaczmy $T(r) = (rx,y) - r(x,y) - W_1(r) + rW_2(r)$.

WNIOSEK 4.3.

Zachodzi następująca równość:

$$\overline{h}^{5,2}(T(r)) = (r^4 - r)(((2,3)) + ((4,1))).$$

DOWÓD.

Korzystając ze wzoru (4.3) oraz Wniosku 4.2 otrzymujemy

$$\overline{h}^{5,2}(T(r)) = r\sigma + (r^3 - r)((3,2)) - r(r^3 - r)((2,3)) + (r^4 - r)(((2,3)) + ((4,1))) -$$

$$- r\sigma - (r^3 - r)((3,2)) + r(r^3 - r)((2,3)) = (r^4 - r)((2,3) + (4,1)). \qquad \square$$

Przeprowadzimy teraz analogiczne rozumowanie, jak w poprzednim rozdziale. Niech

$$D(r,s) = (rx,sy) - rs^4(x,y) - s(sW_1(r) - rW_1(s)) -$$

$$- r(rW_2(s) - sW_2(r)) - (sT(r) - rT(s)).$$

WNIOSEK 4.4.

$$\overline{h}^{5,2}(D(r,s)) = 0,$$

DOWÓD.

Zauważmy, że

$\overline{h}^{5,2}(sW_1(r) - rW_1(s)) = (s(r^3 - r) - r(s^3 - s))((3,2)) = (r^3s - rs^3)((3,2)),$

$\overline{h}^{5,2}(rW_2(s) - sW_2(r)) = (r(s^3 - s) - s(r^3 - r))((2,3)) = (rs^3 - r^3s)((2,3)),$

$\overline{h}^{5,2}(rT(s) - sT(r)) = (r(s^4 - s) - s(r^4 - r))((2,3)) + ((4,1)) =$

$= (r^4s - rs^4)((2,3)) + ((4,1)).$

Porównując ze wzorem (4.2) otrzymujemy tezę.

□

Przedstawiając dowolny generator (rx, sy) przy pomocy $D(r,s)$ oraz elementów typu $W_1(r)$, $W_2(r)$, $T(r)$ otrzymujemy następujący rozkład:

WNIOSEK 4.5.

$$\overline{\Delta}^{5,2}(R) = R\{D(r,s);\ r,s,t \in R\} + R(x,y,z) + W_1(R) + W_2(R) + T(R),$$

gdzie $W_i(R) = R\{W_i(r);\ r \in R\}$ dla $i = 1,2$ oraz $T(R) = R\{T(r);\ r \in R\}$.

TWIERDZENIE 4.2.

Jądro $Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right) = K$, *gdzie* K *jest podmodułem generowanym przez następujące elementy:*

(1) $D(r,s)$,

(2) $W_i(rs) - r^3W_i(s) - sW_i(r),\ i = 1,2,$

(3) $3sW_i(r) - 3rW_i(s) - (r-s)(W_i(r+s) - W_i(r) - W_i(s)),\ i = 1,2,$

(4) $W_i(ar^3 + bs^3) - W_i(ar^3) - W_i(bs^3) - W_i(ar+bs) + W_i(ar) + W_i(bs) -$

$- 3a^2bW_i(r^2s) - 3ab^2W_i(rs^2),\ i = 1,2,$

(5) $W_i(r+s+t) - W_i(r+s) - W_i(s+t) - W_i(r+t) +$

$+ W_i(r) + W_i(s) + W_i(t) - rstW_i(2),\ i = 1,2,$

(6) $T(r+s) - T(r) - T(s) - (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$

(7) $T(rs) - r^4T(s) - sT(r),$

gdzie $a, b, r, s \in R$.

DOWÓD.

Jak poprzednio zauważmy, że $K \subset Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right)$. Istotnie, dzięki Wnioskowi 4.4 wiemy, że $D(r,s) \in Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right)$. Dzięki Przykładowi 2.2 wiemy, że wartości $\overline{h}^{5,2}$ na elementach (2)-(5) są zerowe, natomiast dzięki Przykładowi 2.1 wiemy, że wartości $\overline{h}^{5,2}$ na elementach (6)-(7) są zerowe. Zatem $\overline{h}^{5,2}$ indukuje homomorfizm $h' : \overline{\Delta}^{5,2}(R)/K \longrightarrow \overline{\Gamma}^{5,2}(R) \subset \Gamma^{5,2}(R)$. Oznaczmy przez $\overline{W_1(R)}$ (odpowiednio $\overline{W_2(R)}$, $\overline{T(R)}$) obraz $V_1(R)$ (odpowiednio $W_2(R)$, $T(R)$) przez homomorfizm naturalny. Wówczas $h'(\overline{V_1(R)}) = I_3(R)((3,2))$ i analogicznie $h'(\overline{V_2(R)}) = I_3(R)((2,3))$, $h'(\overline{W(R)}) = I_4(R)(((4,1)) + ((2,3)))$ Jak poprzednio (dzięki Twierdzeniu 2.10) można pokazać, że ograniczenia $h'|_{\overline{W_1(R)}}$, $h'|_{\overline{W_2(R)}}$ są monomorfizmami oraz że (dzięki Twierdzeniu 2.6) ograniczenie $h'|_{\overline{T(R)}}$ jest monomorfizmem. Niech teraz $x \in Ker\left(\overline{h}^{5,2}\right)$, skąd $\overline{x} \in Ker(h')$. Wtedy na mocy Wniosku 4.5 i tego że $D(r,s) \in K$, mamy $\overline{x} = r\overline{(x,y)} + \overline{w_1} + \overline{w_2} + \overline{t}$, gdzie $r \in R, w_i \in W_i(R), i = 1,2$ oraz $t \in T(R)$. Stąd

$$0 = h'(\overline{x}) = r\sigma + h'(\overline{w_1}) + h'(\overline{w_2}) + h'(\overline{t}).$$

Ponieważ każdy składnik sumy po prawej stronie należy do innego składnika prostego modułu $\overline{\Gamma}^{5,2}$, więc $r = 0$ oraz $h'(\overline{w_1}) = h'(\overline{w_2}) = h'(\overline{t}) = 0$. Korzystając z tego, że ograniczenia homomorfizmu h' są monomorfizmami otrzymujemy, że $\overline{v_1} = \overline{v_2} = \overline{w} = 0$. Zatem $\overline{x} = 0$, skąd $x \in K$. □

Opuszczając symetryczne wersje relacji otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 4.3.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 2-równości dla klasy Hom^5 :

$(A1)$, $(A2)$, (A) *oraz*

(1) $D(r,s) = 0,$

(2) $W(rs) = r^3W(s) + sW(r),$

(3) $3sW(r) - 3rW(s) = (r-s)(W(r+s) - W(r) - W(s)),$

(4) $W(ar^3 + bs^3) - W(ar^3) - W(bs^3) - W(ar+bs) + W(ar) + W(bs) =$
$= 3a^2bW(r^2s) + 3ab^2W(rs^2),$

(5) $W(r+s+t) - W(r+s) - W(s+t) - W(r+t) +$
$+ W(r) + W(s) + W_i(t) - rstW(2) = 0,$

(6) $T(r+s) = T(r) + T(s) + (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$

(7) $T(rs) = r^4T(s) + sT(r),$

gdzie $a,b,r,s,t \in R$, x,y,z *są dowolnymi elementami z dzedziny odwzorowania,*

$$W(r) = -(r+1)(3(rx,x,y) + (3-r)(rx,x,x,y) + (x,x,ry,y) -$$
$$- r^2(2(x,x,x,y) + (x,x,y,y)) - 3(2r-r^2)(x,x,y)) -$$
$$- ((rx,y) - (-rx,y) - r((x,y) - (-x,y))),$$

$$T(r) = (rx,y) - r(x,y) +$$
$$- (-(r+1)(3(rx,x,y) + (3-r)(rx,x,x,y) + (x,x,ry,y) -$$
$$- r^2(2(x,x,x,y) + (x,x,y,y)) - 3(2r-r^2)(x,x,y)) -$$
$$- ((rx,y) - (-rx,y) - r((x,y) - (-x,y)))) +$$
$$r(-(r+1)(3(x,ry,y) + (3-r)(x,ry,y,y) + (x,x,ry,y) -$$
$$- r^2((x,x,y,y) + 2(x,y,y,y)) - 3(2r-r^2)(x,y,y)) -$$
$$- ((x,ry) + (-x,ry) - r((x,y) + (-x,y)))),$$

$$D(r,s) = (rx,sy) - rs^4(x,y) - s(sW_1(r) - rW_1(s)) -$$
$$- r(rW_2(s) - sW_2(r)) - (sT(r) - rT(s)),$$

przy czym $W_1(r) = W(r)$, $W_2(r)$ *jest symetryczną wersją* $W_1(r)$, a (x, y), (x, y, z) oraz (x, y, z, t) *oznaczają wartość odpowiednio drugiego, trzeciego* i *czwartego defektu rozważanego odwzorowania.*

ROZDZIAŁ 5

Podsumowanie

Poniższe twierdzenie podsumowuje dotychczasowe badania nad relacjami spełnianymi przez odwzorowania stopnia 5, zawarte w Podrozdziale 3.2 oraz Rozdziale 4.

TWIERDZENIE 5.1.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw równości spełnianych przez odwzorowania stopnia 5, czyli definiują klasę $ED(Hom^5)$:

(1) *relacje (A1), (A2), (A3),*

(2) $D(r, s, t) = 0,$

(3) $U(r + s) = U(r) + U(s) + rsU(2),$

(4) $U(rs) = r^2U(s) + sU(r),$

(5) $V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$

(6) $3sV(r) - 3rV(s) = (r - s)(V(r + s) - V(r) - V(s)),$

(7) $V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar + bs) + V(ar) + V(bs) =$
$= 3a^2bV(r^2s) - 3ab^2V(rs^2),$

(8) $V(r+s+t)-V(r+s)-V(s+t)-V(r+t)+V(r)+V(s)+V(t)-rstV(2) = 0,$

(9) $D(r, s) = 0,$

(10) $W(rs) = r^3W(s) + sW(r),$

(11) $3sW(r) - 3rW(s) = (r - s)(W(r + s) - W(r) - W(s)),$

(12) $W(ar^3 + bs^3) - W(ar^3) - W(bs^3) - W(ar + bs) + W(ar) + W(bs) -$
$- 3a^2bW(r^2s) - 3ab^2W(rs^2) = 0,$

(13) $W(r+s+t) - W(r+s) - W(s+t) - W(r+t) +$

$+ W(r) + W(s) + W(t) - rstW(2) = 0,$

(14) $T(r+s) = T(r) + T(s) + (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$

(15) $T(rs) = r^4T(s) + sT(r),$

gdzie wyrażenia $D(r,s), U(r), V(r)$ zostały zdefiniowane Twierdzeniu 3.4, a wyrażenia $D(r,s,t), W(r), T(r)$ zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 4.3. Ponadto

1) równość (3) można opuścić, a równość (4) zastąpić równością (2) z Twierdzenia 3.7,

2) równości (2)-(8) można zastąpić równościami (B), (B1), (B2), (S) z Twierdzenia 3.1.

Zauważmy, że w dowodach kluczowych twierdzeń (Twierdzenia 3.3 oraz Twierdzenia 4.2) nie korzysta się z postaci elementów $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$, $T(r)$. Istotne jest tylko to, aby ich obrazy spełniały relacje analogiczne do tych, jakie spełniają elementy $r^2 - r$, $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$. Oznacza to, że gdyby udało się znaleźć prostsze elementy o powyższych własnościach, również ostateczne równości mogłyby być prostsze. Zwróćmy również uwagę, że przy dodatkowych założeniach dotyczących pierścienia R ostateczny zestaw równości również mógłby być prostszy. Łatwo zauważyć, że przy pomocy elementów $W_1'(r)$, (odpowiednio $W_1''(r)$) moglibyśmy otrzymać prostsze równości w przypadku pierścieni z odwracalną trójką, (odpowiednio dwójką). Na koniec warto zauważyć, że zastosowana w tej pracy metoda może być również użyta do znalezienia relacji dla klasy Hom^4.

Bibliografia

[1] M. Ferrero, A. Micali, *Sur les n-applications*, Bull. Soc. Math. France Mém. 59 (1979), 33-53

[2] M. Maciejewski, A. Prószyński, *Mappings of degree 5, part I*, Colloquium Mathematicum 117 (2009), 223-241 part I

[3] A. Prószyński, *Equationally definable functors adn polynomial mappings*, Journal of Pure and Applied Algebra 56 (1889), 59-84

[4] A. Prószyński, *Forms and mappings. I: Generalities*, Fund. Math. 122 (1984), 219-235

[5] A. Prószyński, *Forms and mappings. III: Regular m-applications*, Comment. Math. 28 (1989), 305-330

[6] A. Prószyński, *Forms and mappings. IV: Degree 4*, Bull. Polish Acad. Sci. 37 (1989), 269-278

[7] A. Prószyński, *Odwzorowania wyższych stopni*, WSP, Bydgoszcz 1987

[8] A. Prószyński, *Relations between elements* $r^2 - r$, Bull. Polish Acad. Sci. 55 No. 4 (2007), 317-323

[9] N. Roby, *Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules*, Ann. Éc. Norm. Sup. 80 (1963), 213-348